

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI OUZOU  
FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE



# Mémoire

de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'Etat en  
Electrotechnique Option Machines Electriques

## Thème

**Calcul des Pertes par courants de  
Foucault dans une tôle ferromagnétique  
d'un transformateur**

*Proposé et dirigé par :*

*M<sup>r</sup> M. Belkadi*

*M<sup>r</sup> H. Houassine*

*Etudié par :*

*M<sup>elle</sup> Kahina Menana*

*M<sup>r</sup> Lyazid Izerkhef*

*M<sup>elle</sup> Sabiha Mounsi*

**Promotion 2008**



# Remerciement

Nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance à notre promoteur monsieur **HOUACINE HAMZA**, maitre assistant au département de l'université de Media, pour nous avoir bien guidé et aidé le long de notre projet, ainsi que pour son précieux temps et attention qu'il nous a consacré et pour son confiance qu'il nous a donné en acceptant de nous encadrer.

Nous tenons aussi a remercie monsieur **BELKADI MOHAMED** Doctorant EDSTIM 37 Bd de l'Université – BP 40644602 Saint-Nazaire Cedex, pour son aide précieuse en dépit de la charge de son travail.

On tient aussi a remercie monsieur **H.MENANA** de nous avoir aidés à faire aboutir ce travail, malgré son emploi du temps surchargé.

Nous profonds remerciement vont aussi à monsieur **A.DICHE**, maître assistant à l'université M.Mammeri de Tizi-Ouzou, pour son aide et sa disponibilité et pour avoir accepté de siéger dans nous jury.

Nous remercions vivement le personnel d'**ELECTRO-INDUSTRIE** d'**Azazga** en particulier **M<sup>r</sup>.DJ. Belkacemi** pour leur disponibilité et leur aide.

On tient à remercier messieurs les membres du jury, qui nous ferons l'honneur d'examiner ce travail.

# *Dédicaces*

## Je dédie ce travail à:

- Mes chers parents qui ont toujours derrière moi, et c'est grâce à eux que je suis aujourd'hui ici.
- Mon cher mari Hidouche et ma fille Lydia.
- Mes sœurs Lynda et son mari Morade, Hayat et Saida.
- Mes frères Hocine et Boussad.
- Mes beaux parents.
- Mes grands parents.
- Tous mes amis (es).

**Kahina**

## Je dédie ce travail à :

- Mes chers parents et je tiens à les remercier pour leurs soutient et leurs encouragements tout au long de mes études.
- Mes frères et sœurs.
- Ma très chère grand-mère et sa sœur.
- Tout mes ami(e)s.

**Lyazid**

## Je dédie ce travail à:

- Mes chers parents grasse a eux je ne serai jamais arrivée là où j'en suis
- Ma grand mère
- Mes frères Farid et Djamel
- Mes sœurs Malika, Dahbia, Kahina
- Ma sœur Noura, son époux Aissa et leur fille Mazgha
- Samhar pour son soutien et ça disponibilité
- Mes copines Farida, lynda, Radja, Sadia et en particulier ma très chère Saida
- Tous mes amis (es) qui me sont chers

**sabiha**

# ***SOMMAIRE***

Introduction générale .....	1
<b>Chapitre I : Introduction au magnétisme et aux matériaux magnétiques</b>	
I.1. Introduction .....	3
I.2. Magnétisme .....	3
I.2.1. Origine du magnétisme .....	3
I.2.2. Aimantation et polarisation magnétique .....	4
I.2.3. La perméabilité magnétique et la susceptibilité .....	5
I.2.4. Relation entre l'induction et le champ magnétique .....	7
I.3. Les matériaux magnétiques .....	7
I.3.1. Le comportement magnétique des corps magnétiques .....	7
I.3.1.1. Le diamagnétisme .....	8
I.3.1.2. Le paramagnétisme .....	8
I.3.1.3. Le ferromagnétisme .....	8
I.3.2. La température de Curie .....	9
I.3.3. Domaines magnétiques .....	9
I.3.4. Mécanisme de l'aimantation .....	10
I.4. Courbe de première aimantation .....	11
I.5. Cycle d'hystérésis .....	13
I.6. Classification des matériaux ferromagnétiques .....	14
I.6.1. Les matériaux ferromagnétiques doux .....	14
I.6.2. Les matériaux ferromagnétiques durs .....	15
I.7. Les courants de Foucault .....	16
I.8. Les pertes dans les matériaux .....	16
I.8.1. Les pertes par hystérésis .....	16
I.8.2. Les pertes par courant de Foucault .....	16
I.9. Epaisseur de peau .....	17
I.10. Les circuits magnétiques .....	18
I.10.1. Les tôles Fer Silicium.....	18
I.10.1.1. Les tôles Fer Silicium à grains non orientés .....	19
I.10.1.2. Les tôles Fer Silicium à grains orientés .....	19

Conclusion.....	20
<b>Chapitre II: Modélisation par calcul de champ en génie électrique</b>	
<b>II.1. Introduction .....</b>	<b>21</b>
<b>II.2. Les équations électromagnétiques .....</b>	<b>21</b>
<b>II.2.1. Les équations de Maxwell .....</b>	<b>21</b>
<b>II.2.2. Interprétation physiques des équations de Maxwell .....</b>	<b>22</b>
<b>II.2.2.1. Les équations de couplages électromagnétiques .....</b>	<b>22</b>
<b>II.2.2.2. Les équations de conservations .....</b>	<b>23</b>
<b>II.2.3. Forme intégrale des équations de Maxwell .....</b>	<b>23</b>
<b>II.2.3.1. Loi de Gauss Maxwell .....</b>	<b>23</b>
<b>II.2.3.2. Loi de Faraday Maxwell .....</b>	<b>23</b>
<b>II.2.3.3. Loi de conservation du flux magnétique.....</b>	<b>24</b>
<b>II.2.3.4. Loi d'Ampère - Maxwell .....</b>	<b>24</b>
<b>II.2.4. Lois constitutives du milieu .....</b>	<b>24</b>
<b>II.2.4.1. Milieu magnétique .....</b>	<b>24</b>
<b>II.2.4.2. Milieu diélectrique .....</b>	<b>24</b>
<b>II.2.4.3. Matériau aimanté .....</b>	<b>24</b>
<b>II.2.5. Loi d'Ohm .....</b>	<b>25</b>
<b>II.2.5.1. Milieu conducteur avec source .....</b>	<b>25</b>
<b>II.2.5.2. Milieu conducteur en mouvement .....</b>	<b>26</b>
<b>II.3. Continuité à l'interface entre deux milieux différents .....</b>	<b>26</b>
<b>II.3.1. Continuité de la composante normale du déplacement électrique .....</b>	<b>26</b>
<b>II.3.2. Continuité de la composante tangentielle du champ électrique .....</b>	<b>26</b>
<b>II.3.3. Continuité de la composante normale de l'induction magnétique .....</b>	<b>26</b>
<b>II.3.4. Continuité de la composante tangentielle du champ magnétique .....</b>	<b>26</b>
<b>II.4. Equation de continuité .....</b>	<b>27</b>
<b>II.5. Les conditions aux limites .....</b>	<b>27</b>
<b>II.5.4.1. La condition de Dirichlet .....</b>	<b>27</b>
<b>II.5.4.2. La condition de Newman .....</b>	<b>27</b>
<b>II.5.4.3. La condition mixte Dirichlet –Newman .....</b>	<b>28</b>
<b>II.5.4.4 La condition de périodicité .....</b>	<b>28</b>
<b>II.6. Formulation électromagnétique du problème .....</b>	<b>28</b>
<b>II.6.1. Choix de la formulation.....</b>	<b>28</b>
<b>II.6.2. Formulation magnétodynamique en terme de champ magnétique .....</b>	<b>29</b>

Conclusion .....	30
<b>Chapitre III: Résolution des équations aux dérivée partielles par la méthode des éléments finis</b>	
III.1. Introduction .....	31
III.2. Formulation intégrale .....	31
III.2.1. Formulation variationnelle .....	31
III.2.2. Méthode de résidus pondérés .....	32
III.3. Discrétisation .....	34
III.3.1. Élément de référence .....	34
III.4. Fonction d'interpolation .....	35
1) Le principe de l'état complet .....	35
2) Le principe de compatibilité .....	36
III.5. Fonction d'approximation sur un élément 2D.....	36
III.5.1. Cas d'un élément triangulaire linéaire 2D.....	36
III.6. Fonction d'approximation sur le domaine 2D.....	39
III.7. Les avantages et les inconvénients de la méthode des éléments finis .....	39
III.8. Implémentation de la méthode des éléments finis.....	39
III.9. Résolution de l'équation magnétodynamique par la méthode des éléments finis..	40
III.9.1. Ecriture intégrale de l'équation .....	41
III.9.2. Application des conditions aux limites .....	43
III.9.3. Discrétisation .....	43
III.9.4. Interpolation élément finis .....	43
III.9.5. Calcul des termes élémentaires des matrices $K^e$ et $T^e$ .....	44
III.9.6. Assemblage .....	46
Conclusion .....	46
<b>Chapitre IV: Application</b>	
IV.1. Introduction .....	47
IV.2. présentation du dispositif .....	47
IV.3. Calcul des courants induits .....	48
IV.4. Calcul des pertes par courant de Foucault.....	49
IV.5. Architecture du code de calcul éléments finis 2D .....	49
IV.6. Pertes par courant de Foucault dans la tôle .....	51

<b>IV.6.1 Calcul linéaire .....</b>	<b>51</b>
<b>IV.6.1.1. Courbe des pertes en fonction de l'induction magnétique.....</b>	<b>51</b>
<b>IV.6.1.2. Courbe des pertes en fonction de la fréquence.....</b>	<b>52</b>
<b>IV.6.2. Calcul non linéaire .....</b>	<b>54</b>
<b>IV.6.2.1. Courbe des pertes en fonction de l'induction magnétique.....</b>	<b>55</b>
<b>IV.6.2.2. Courbe des pertes en fonction de la fréquence.....</b>	<b>55</b>
<b>IV.7. Comparaison entre les résultats du calcul linéaire et ceux du calcul non linéaire... .....</b>	<b>58</b>
<b>IV.7.1. Variation des pertes en fonction de l'induction magnétique .....</b>	<b>58</b>
<b>IV.7.2. Variation des pertes en fonction de la fréquence.....</b>	<b>59</b>
<b>Conclusion .....</b>	<b>61</b>
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>62</b>



Vu de leurs propriétés exploitées dans de nombreuses applications techniques, les matériaux magnétiques occupent une place importante dans l'électrotechnique, la plupart des dispositifs électriques leur font appel ; le circuit magnétique d'un transformateur et d'une machine électrique sont construits par des tôles ferromagnétiques, les aimants permanents le sont aussi, et d'autres objets que nous utilisons dans notre vie quotidienne.

Chaque matériau magnétique est caractérisé par la courbe d'aimantation  $B(H)$  dont les deux grandeurs essentielles sont l'excitation et l'induction qui sont liées par une relation de proportionnalité qui dépend du point de fonctionnement, c'est la perméabilité magnétique pour les ferromagnétiques ou la non linéarité importante de la relation entre  $B$  et  $H$  qui rend cette grandeur variable avec  $H$ .

Les pertes par courants de Foucault et hystérésis dans les matériaux magnétiques sont à l'origine de plusieurs dysfonctionnements dus aux dégradations des propriétés physiques des isolants et des tôles magnétiques. Il est important de pouvoir évaluer ces pertes pour éviter ces dysfonctionnements.

Pendant longtemps, à défaut de moyens de calcul, les ingénieurs électrotechniciens ont utilisé des formules plus ou moins empiriques pour le dimensionnement des appareils électriques. Ces formules donnent des résultats très satisfaisants; cependant, l'accroissement des exigences industrielles en terme de précision et d'optimisation fait que ces dernières soient insuffisantes. D'autre part, les progrès réalisés en terme de rapidité et de capacité de stockage des outils de calcul numérique (ordinateurs) nous permettent, de nos jours, d'utiliser les méthodes numériques qui sont plus précises quand il s'agit de traiter des géométries complexes. Il devient donc indispensable à l'ingénieur électrotechnicien de maîtriser ces outils de modélisation numériques pour répondre à ces exigences industrielles.

Ce travail constitue d'une part une initiation à la modélisation numérique des systèmes électromagnétiques en utilisant la méthode des éléments finis. Il nous permettra d'acquérir les connaissances nécessaires pour pouvoir formuler un problème électromagnétique, et savoir implémenter un code de calcul en éléments finis en deux dimensions sur MATLAB afin de le résoudre. D'autre part, nous nous intéressons à l'évaluation numérique des pertes par courants de Foucault dans une tôle magnétique.

A cet effet, nous avons structuré notre mémoire comme suit:

Le premier chapitre présente un aperçu sur le magnétisme et les matériaux magnétiques, leur naissance et les relations qui les lient. Nous nous sommes également intéressés aux principaux groupes de matériaux magnétiques qui sont les paramagnétiques, les

diamagnétiques et les ferromagnétiques. Un aperçu sur les pertes dans les matériaux magnétiques à été aussi abordé.

Le deuxième chapitre est consacré à un rappel sur les équations mathématiques en électromagnétique, plus précisément les équations de Maxwell; ainsi que leurs interprétation physiques pour formuler l'équation magnétodynamique.

Dans le troisième chapitre nous présentons les modèles numériques adoptés pour la résolution des équations aux dérivées partielles; il s'agit de la méthode des éléments finis.

Enfin, dans le quatrième et dernier chapitre nous présentons les résultats de calcul obtenus sur une tôle magnétique, en utilisant un code de calcul élaboré sous le logiciel MATLAB.

## I.1 Introduction

La plupart des appareils qui utilisent l'énergie électrique nécessitent l'emploi de matériaux magnétiques.

L'intérêt pour le magnétisme et les matériaux magnétiques est allé croissant aussi pour leurs applications. Depuis un siècle les utilisations de l'énergie électrique ont connu un développement spectaculaire qui se poursuit encore aujourd'hui à un rythme soutenu. Or, pour produire l'énergie électrique, et très souvent pour l'utiliser, on ne peut pas se passer des matériaux magnétiques. Ils sont donc au cœur de nombreux dispositifs industriels qui relèvent du génie électrique [1].

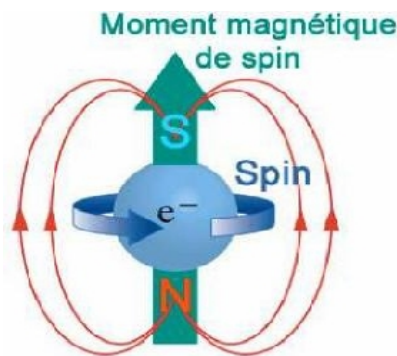
## I.2 Magnétisme

### I.2.1 Origine du magnétisme

#### Moment magnétique du spin

L'électron orbitant autour du noyau d'un atome tourne sur lui-même, la rotation effectuée porte le nom spin.

L'électron est une particule chargée, ce spin crée un moment magnétique appelé moment du spin.



**Figure 1.1 :** Moment magnétique de spin d'un électron

## Moment magnétique orbital

Le moment magnétique orbital est la résultante de la rotation d'un électron autour du noyau d'un atome. L'origine de ce moment peut être établie en s'appuyant sur le modèle ampérien [2] :

$$\vec{m}_A = i \times \vec{S} \quad (\text{I.1})$$

Avec :

S surface délimitée par la trajectoire de l'électron.

i courant créé par le mouvement orbital de l'électron.

$$i = \frac{-e \cdot v}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad (\text{I.2})$$

Où

v la vitesse de rotation.

r le rayon d'orbite supposée circulaire que l'électron parcourt.

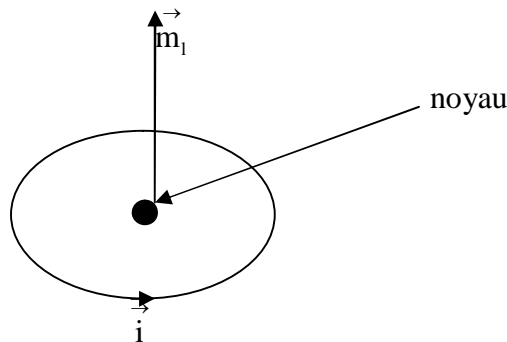


Figure 1.2 : Moment magnétique orbital associé à l'électron

### I.2.2 Aimantation et polarisation magnétique [3]

#### Intensité d'aimantation

On appelle intensité d'aimantation, la valeur du moment magnétique ampérien par unité de volume de la substance magnétique, elle est obtenue en soumettant le matériau à l'influence d'un champ magnétique.

Elle est définie comme la densité volumique d'aimantation

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{m}_A}{V} \quad [\text{A/m}] \quad (\text{I.3})$$

Avec :

$m_A$  moment magnétique Ampérien. [A.m<sup>2</sup>]

V volume de la substance. [m<sup>3</sup>]

## Polarisation magnétique

C'est le moment magnétique dipolaire par unité de volume de la substance magnétique dont le vecteur est défini par :

$$\vec{I} = \frac{\sum \vec{m}_d}{V} \quad [\text{T}] \quad (\text{I.4})$$

$m_d$  moment magnétique dipolaire

## Relation entre la polarisation magnétique et l'aimantation

La relation suivante relie le vecteur aimantation et le vecteur polarisation :

$$\vec{I} = \mu_0 \vec{M} \quad (\text{I.5})$$

Où :

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} : \text{perméabilité du vide}$$

### I.2.3 La perméabilité magnétique et la susceptibilité

#### La perméabilité magnétique

La perméabilité notée  $\mu$  est la faculté que possède un matériau à canaliser le champ magnétique [3], c'est-à-dire à concentrer les lignes de champ du spectre magnétique ou à augmenter la valeur de l'induction magnétique.

1. Dans le cas de l'air :

$$\mu = \mu_0$$

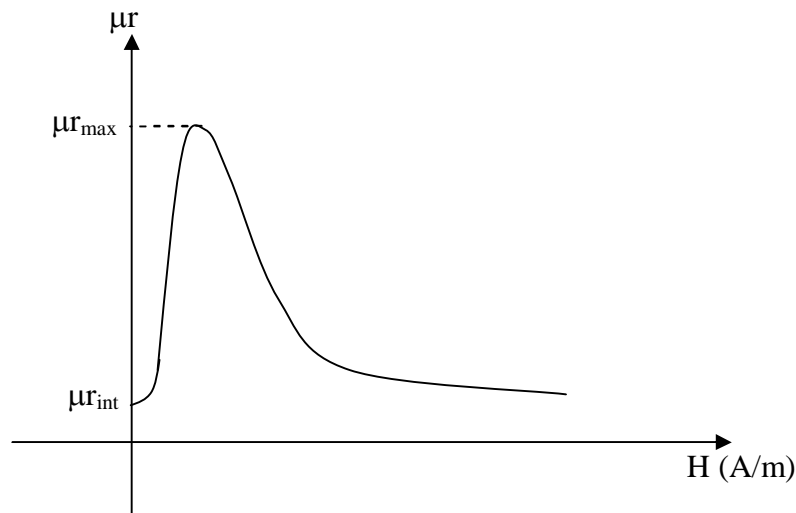
2. Dans le matériau :

- **Cas linéaire**

La perméabilité magnétique absolue signifie le produit de la perméabilité du vide et la perméabilité relative :  $\mu = \mu_0 \mu_r$

- **Cas non linéaire**

La perméabilité magnétique relative varie avec le champ magnétique  $H$ , elle part d'une valeur initiale pour un champ nul, elle croît avec  $H$  et passe par un maximum, puis décroît lentement pour tendre vers une valeur constante pour les grandes valeurs du champ (saturation) [4].



**Figure 1.3 :** Variation de la perméabilité magnétique en fonction du champ

## La susceptibilité magnétique

La susceptibilité magnétique est un coefficient qui exprime en quelque sorte le taux d'aimantation acquis par le matériau.

1. La susceptibilité magnétique absolue :

On appelle susceptibilité magnétique absolu  $\chi$  le quotient :

$$\chi = \frac{I}{H} \quad [H/M] \quad (I.6)$$

2. La susceptibilité magnétique relative :

C'est un coefficient qui exprime en quelque sorte le taux d'aimantation du matériau, elle est exprimée sans dimension par le rapport :

$$\chi_r = \frac{M}{H} \quad (I.7)$$

Avec  $H$  champ magnétique.

## La relation entre la perméabilité relative et la susceptibilité

La formule suivante relie la perméabilité magnétique et la susceptibilité

$$\mu_r = 1 + \chi \quad (\text{I.8})$$

### I.2.4 Relation entre l'induction et le champ magnétiques

#### Dans le vide

La relation reliant l'induction magnétique et le champ dans le vide est la suivante :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\text{I.9})$$

#### Dans le matériau

Le champ d'excitation et l'aimantation se superposent pour exprimer le champ d'induction qui est défini par :

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (\text{I.10})$$

## I.3. Les matériaux magnétiques

### I.3.1 Le comportement magnétique des corps magnétiques

Le comportement magnétique d'un matériau est intimement lié à sa structure cristalline et à la structure électronique de ses atomes.

D'après Ampère, le magnétisme des corps provenait des courants atomiques dont on distingue deux types de courants [5]

- 1) les courants dus aux mouvements des électrons sur leur orbite autour du noyau de l'atome.
- 2) les courants dus aux mouvements de spin des électrons autour de leurs axes propres.

A partir des deux modèles de courant atomique, on distingue différents types de magnétisme :

- Le diamagnétisme
- Le paramagnétisme
- Le ferromagnétisme

### I.3.1.1 Le diamagnétisme

Le diamagnétisme résulte des mouvements orbitaux des électrons sous l'effet d'un champ magnétique extérieur, ces mouvements engendrent une aimantation induite obéissant à la loi de Lenz ; proportionnelle au champ appliqué et de sens opposé.

Les substances diamagnétiques sont caractérisées par une susceptibilité négative et faible de l'ordre de  $10^{-6}$ .

Le diamagnétisme est un phénomène général qui se produit dans la matière, il existe même dans le paramagnétisme et le ferromagnétisme mais il ne se voit pas à cause des autres phénomènes dont l'effet est prépondérant.

### I.3.1.2 Le paramagnétisme

Le paramagnétisme se manifeste dans les substances composées d'atomes ayant des couches électroniques incomplètes d'électrons, ces atomes possèdent alors des moments magnétiques issus des mouvements orbitaux et de spins, le moment magnétique résultant dans la substance en l'absence du champ extérieur est nul. Sous l'effet d'un champ extérieur les moments magnétiques atomiques de la substance tendent à s'aligner dans le sens du champ appliqué donnant naissance à une aimantation de même sens. Ce phénomène reste limité par l'agitation thermique et dépend de la température (loi de Curie):

$$M = C \frac{H}{T} \quad (\text{I.11})$$

C : constante de Curie du matériau.

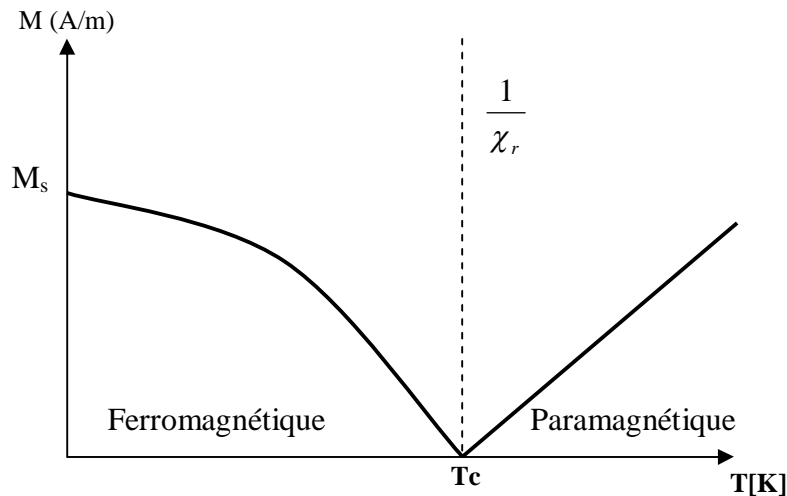
### I.3.1.3 Le ferromagnétisme

Le ferromagnétisme est une propriété liée à la structure électronique caractéristique des métaux de transition de tableau périodique (fer, cobalt, nickel), et des terres rares, ainsi certains alliages tels que le fer-nickel et fer-silicium, ces métaux ont en commun la particularité de présenter une couche électronique interne non complètement remplie.

Les matériaux ferromagnétiques sont des matériaux exceptionnels, se distinguent des autres matériaux (paramagnétiques, diamagnétiques) par leur propriétés de procéder une aimantation permanente spontanée en l'absence de champ magnétique extérieur, mais ces matériaux peuvent perdre leur propriétés, alors cette substance acquiert un caractère paramagnétique (Figure I.4) à cause de l'agitation thermique qui marque la transition entre l'existence et la disparition de l'aimantation par la formule de Curie Weiss suivante :



$$\chi_r = \frac{C}{T - T_c} \quad (\text{I.12})$$



**Figure 1.4 :** Effet de la température sur l'aimantation d'un matériau ferromagnétique [6]

### I.3.2 la température de Curie

En 1895 Pierre Curie étudie les propriétés magnétiques des corps à diverses températures, il établit les lois de variation de l'aimantation des corps en fonction de la température. Il a observé plusieurs phénomènes :

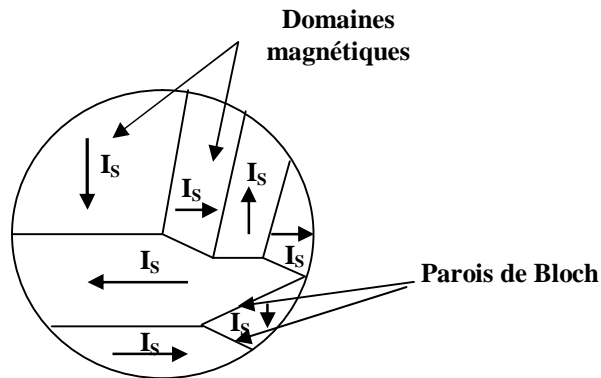
- Le diamagnétisme est insensible à la température et indépendant de l'intensité du champ.
- Plus la température est élevée, plus la susceptibilité est petite
- Au-delà de la température de Curie, les ferromagnétiques perdent leurs propriétés magnétiques et se comportent comme des paramagnétiques. Ce phénomène peut être expliqué par le fait que lorsqu'on augmente la température, on augmente aussi l'agitation thermique des atomes, ils deviennent plus mobiles et moins stables [7].

### I.3.3 Domaines magnétiques

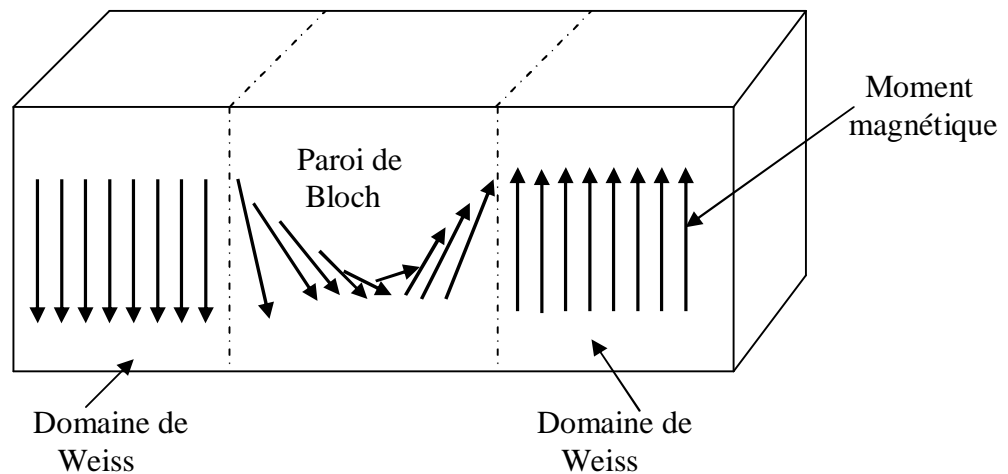
L'orientation parallèle des moments magnétiques est un phénomène local. Des techniques d'observation appropriées ont permis de mettre en évidence la répartition de la polarisation magnétique dans la matière, elles révèlent qu'un échantillon de taille macroscopique est généralement divisé en de nombreuses régions polarisées, dans chaque région, tous les moments magnétiques atomiques sont alignés parallèlement les uns aux autres

et sont orientés suivant la direction de la polarisation de la région à laquelle ils appartiennent. Cette région porte le nom de domaine magnétique ou domaine de Weiss [6].

Chaque domaine est séparé d'un voisin par une zone de transition dans laquelle l'orientation des moments magnétiques passe progressivement de la direction de polarisation de l'un des domaines, à celle régnant dans l'autre domaine [6].



**Figure 1.5 :** Division d'un échantillon en domaines magnétiques

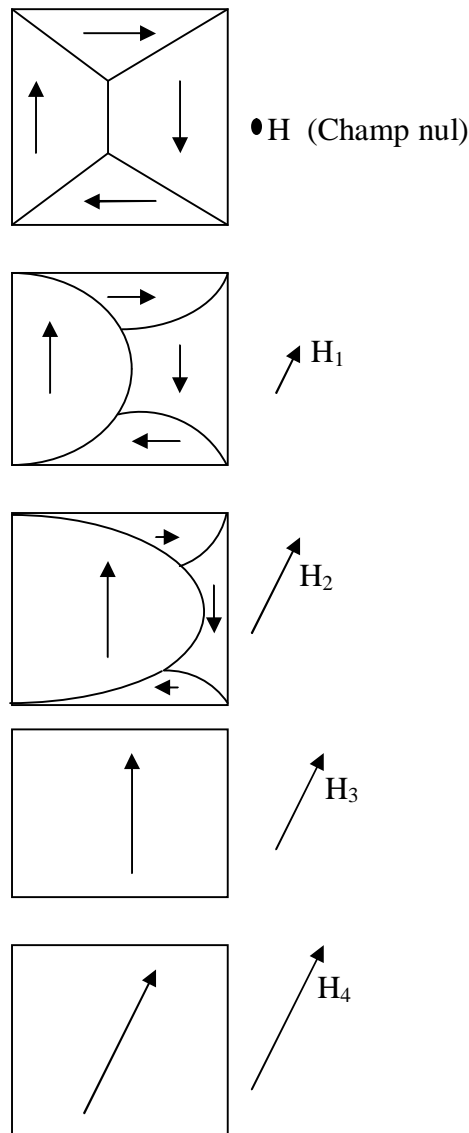


**Figure 1.6 :** Représentation des parois de Bloch

### I.3.4 Mécanisme de l'aimantation

Lorsqu'un échantillon d'un matériau magnétique est placé dans un champ magnétique d'intensité  $H$ , un moment magnétique global apparaît par le jeu de deux mécanismes élémentaires :

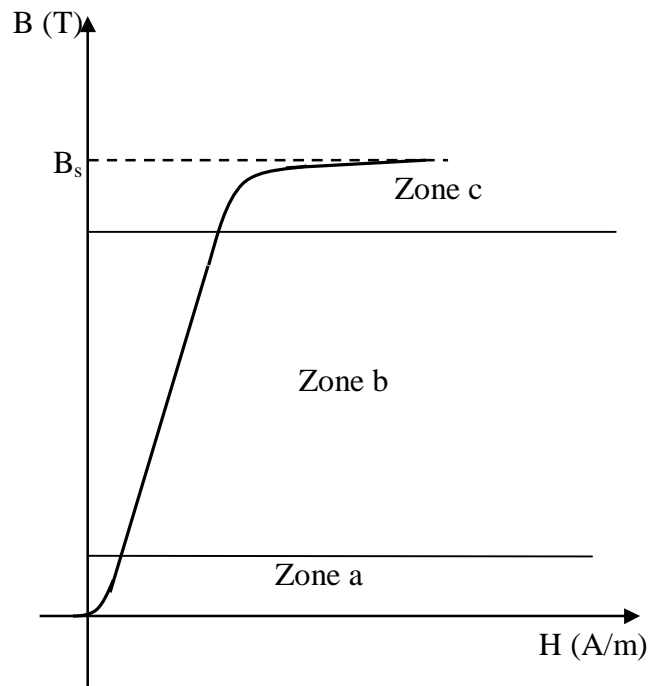
Les déplacements de parois de Bloch et les rotations des moments magnétiques locaux.  
La figure ci-dessous illustre ce mécanisme pour une structure monocristalline.



**Figure 1.7 :** Représentation schématique de processus d'aimantation ( $H_1 < H_2 < H_3 < H_4$ )

#### I.4 Courbe de première aimantation

L'application d'un champ magnétique extérieur régulièrement croissant provoque l'apparition d'une courbe  $B(H)$  appelée courbe de première aimantation ou cycle d'hystérésis principale, elle représente l'évolution de l'induction magnétique de l'état désaimanté du matériau jusqu'à saturation (figure I.8).



**Figure 1.8 :** Courbe de première aimantation

Le diagramme B(H) se divise en trois zones [8] :

- **Zone a : Zone des champs faibles**

Cette zone est caractérisée par un comportement quasi linéaire de la matière. La structure en domaine reste peu perturbée, les parois de Bloch se déplacent légèrement sans aucun bouleversement de la structure en domaine, on aura une déformation réversible des parois qui se comportent comme des membranes élastiques et les points d'épinglage ne changent pas c'est-à-dire l'annulation du champ appliqué permet de revenir de façon approchée à l'état initial.

- **Zone b : Zone des champs moyens**

Dans cette zone, le déplacement des parois de Bloch est le mécanisme le plus dominant [1], il y a constamment des parois qui disparaissent alors que d'autres vont faire des sauts énormes.

- **Zone c : Zone des champs forts :**

Dans cette région la plupart des parois de Bloch ont disparu, l'échantillon se transforme en un seul domaine. L'aimantation quitte progressivement la direction de facile aimantation pour s'aligner suivant H, le matériau est saturé.

## I.5 Cycle d'hystérésis

Le cycle d'hystérésis représente le comportement du matériau lorsqu'on lui applique un champ magnétique, il montre que l'induction magnétique ne dépend pas seulement du champ magnétique d'excitation, elle dépend aussi des propriétés magnétiques du matériau.

A l'état initial, le matériau est désaimanté. L'application d'un champ magnétique croissant progressivement jusqu'à saturation donne la courbe de première aimantation.

Si nous diminuons progressivement la valeur du champ appliqué à partir de la valeur du champ de saturation  $H_s$ , nous remarquons une décroissance de la valeur d'induction magnétique par une courbe différente de la courbe de première aimantation, l'induction magnétique ne repasse pas par la même courbe.

Lorsque le champ s'annule, il demeure dans le matériau une induction magnétique  $B_r$  appelée induction rémanente, elle peut être annulée par l'application d'un champ magnétique d'une valeur négative, on appelle la valeur de ce champ, le champ coercitif noté  $H_c$ .

Si nous continuons à diminuer la valeur du champ magnétique au-delà du champ coercitif, nous aurons une saturation du matériau avec une valeur négative de l'induction de saturation ( $-B_s$ ).

En augmentant progressivement la valeur du champ magnétique à partir de la valeur correspondante à la saturation précédente, nous observons une augmentation de l'induction magnétique formant une courbe symétrique par rapport aux axes à celle formée par décroissance du champ magnétique. Le matériau atteint de nouveau la saturation.

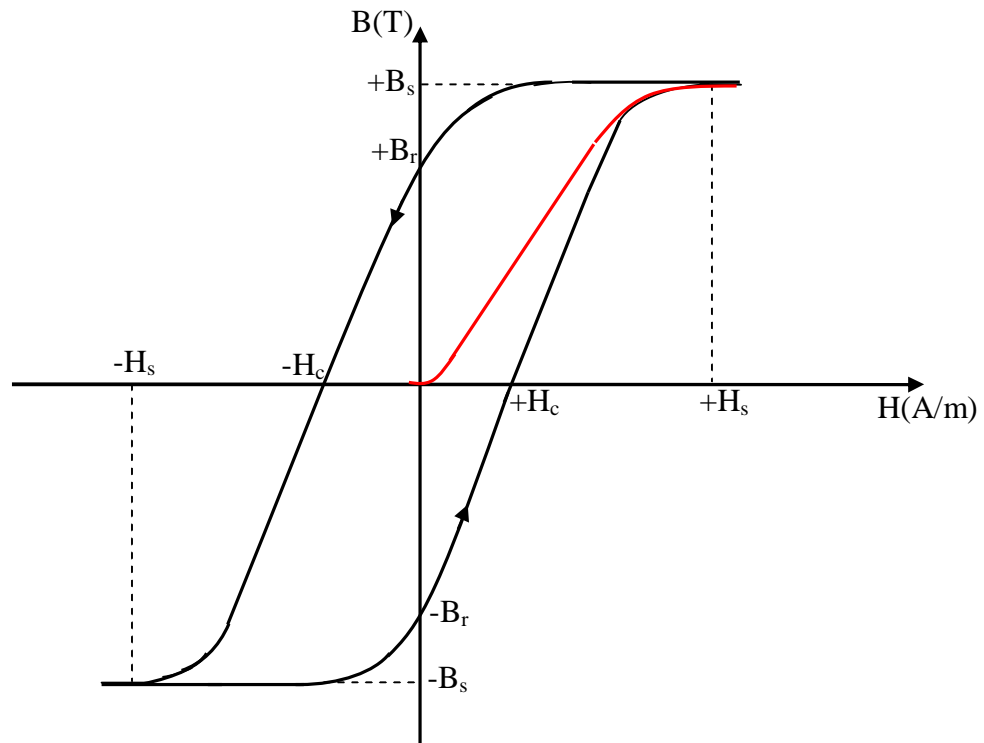


Figure 1.9 : Cycle d'hystérésis

## I.6 Classification des matériaux ferromagnétiques

D'après l'étude faite sur le cycle hystérésis, on distingue deux types de matériau [2]

- Les matériaux ferromagnétiques doux
- Les matériaux ferromagnétiques durs

### I.6.1 Les matériaux ferromagnétiques doux

Le cycle associé à ce type de matériaux est très étroit, ils sont caractérisés par une induction rémanente grande (proche de l'induction de saturation), et par une perméabilité magnétique très élevée et un champ coercitif très réduit.

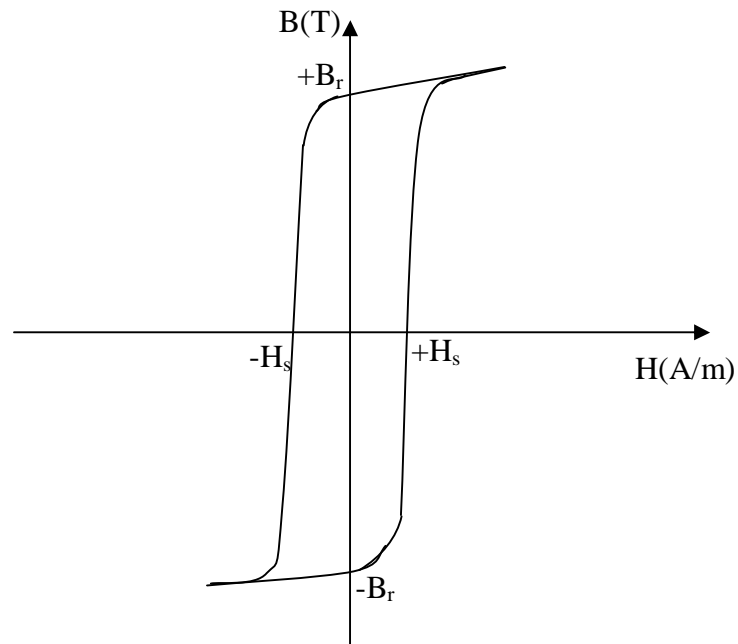


Figure 1.10 : Cycle d'hystérésis pour les matériaux doux

### I.6.2 Les matériaux ferromagnétiques durs

Sont ceux qui s'aimantent difficilement et résistent à toutes désaimantation, ils présentent une induction rémanente relativement faible mais un champ coercitif considérable. Par conséquent, la surface de cycle d'hystérésis est élevée, ils sont utilisés pour la fabrication des aimants permanents.

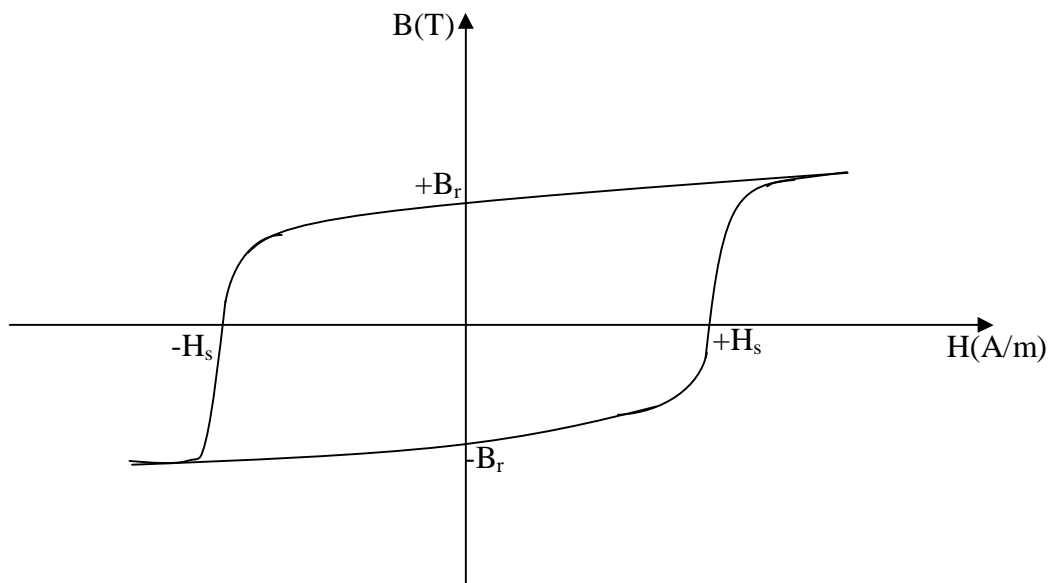


Figure 1.11 : Cycle d'hystérésis des matériaux durs

## I.7 Les courants de Foucault

Les courants de Foucault sont des courants électriques qui se créent dans une masse conductrice placée dans un champ magnétique variable ou par déplacement de la source du champ magnétique uniforme.

Ces courants sont une conséquence de l'induction magnétique [9].

Les courants de Foucault dépendent de la fréquence et de l'épaisseur de conducteur, plus la fréquence est élevée et l'épaisseur du conducteur forte, plus l'effet des courants de Foucault est important [10].

## I.8 Les pertes dans les matériaux

Toute variation d'induction dans un matériau magnétique provoque, à l'intérieur de celui-ci une dissipation d'énergie. Cette énergie apparaît sous forme de chaleur et n'est pas récupérable d'où l'expression de pertes magnétiques.

Les pertes totales sont composées des pertes par hystérésis  $P_h$ , et des pertes par courants de Foucault  $P_{cf}$  dans les matériaux magnétiques conducteurs [7].

### I.8.1 Les pertes par hystérésis

Ce type de pertes est lié au cycle d'hystérésis du matériau. Une transition brutale entre deux domaines de Weiss implique une dépense énergétique qui engendre des pertes par hystérésis, ces pertes sont donc dues au travail des forces de freinage agissant sur les parois de

Bloch en mouvement, elles sont maximales quand des forces d'épinglage sont plus grandes, c'est-à-dire dans les matériaux ferromagnétiques durs.

Elles sont données par l'expression suivante.

$$P_h = f \int H dB \quad (\text{I.13})$$

Où  $f$  est la fréquence.

### I.8.2 Les pertes par courants de Foucault

Les pertes par courants de Foucault sont les pertes par effet joule résultant des courants créés dans toute la matière conductrice (magnétique ou non).

$$P_{cf} = \frac{1}{T} \int_0^T \iiint_V \frac{1}{\sigma} J^2 dv dt \quad (\text{I.14})$$



Avec :

T la période.

$\sigma$  la conductivité électrique.

J densité des courants induits.

v le volume de la matière.

Ces pertes sont importantes dans les matériaux à faible résistivité comme les alliages magnétiques. Dans le but de diminuer les pertes par courants de Foucault, les circuits magnétiques sont de plus en plus divisés en éléments isolés électriquement les uns des autres. Pour des raisons de fabrication évidente, ces éléments effectuent des formes géométriques simples : tôles, rubans, fils circulaires [8].

### I.9 Epaisseur de peau [11]

Sous l'effet du champ magnétique sur les matériaux conducteurs, des courants induits sont créés à l'intérieur de celui-ci, leurs intensités et celle du champ magnétique décroissent à partir de la surface.

La zone du matériau où ce phénomène réagit est appelé épaisseur de peau ou profondeur de pénétration ( $\delta$ ) qui est donnée par l'expression suivante:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\mu\sigma\pi f}} \quad (\text{I.15})$$

Avec :

$\sigma$  : La conductivité du matériau.

f : La fréquence des courants d'alimentation.

$\mu$  : La perméabilité absolue du matériau.

On voit bien d'après l'expression (I.15) que la profondeur de pénétration dépend principalement de la géométrie de la pièce conductrice, de ses caractéristiques physiques et de la fréquence du champ magnétique.

Cette relation montre aussi que pour les matériaux plus conducteurs et plus perméables, le phénomène d'induction est plus superficiel.

## I.10 Les circuits magnétiques

Constitués de matériaux ferromagnétiques, les circuits magnétiques sont utilisés dans les machines électriques pour canaliser le flux magnétique de telle manière à avoir une induction donnée dans une zone précise. Afin de réduire les pertes par courants de Foucault, et de faciliter la réalisation des circuits de formes complexes, les circuits magnétiques se présentent généralement en tôles magnétiques, de formes variées, empilées et isolées les unes des autres (figure I.12).

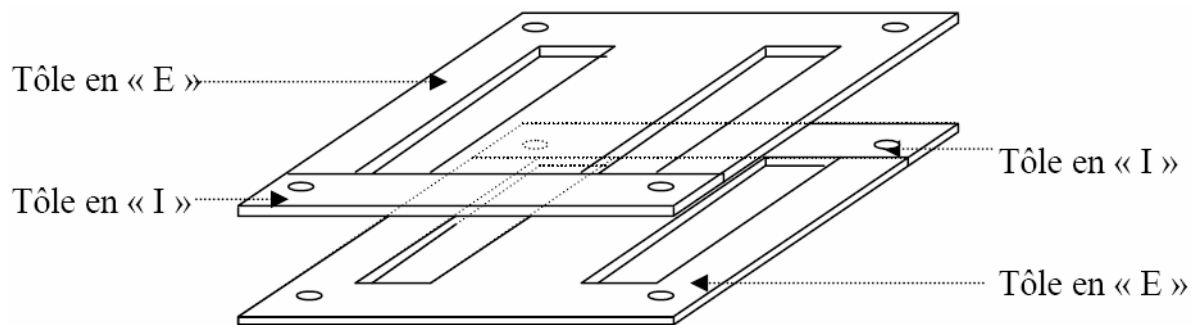


Figure 1.12 : Exemple d'empilement de tôles magnétiques [12]

### I.10.1 les tôles fer-silicium

Pour réduire sa conductivité et pour des raisons métallurgiques [1], le fer n'est pratiquement jamais utilisé à son état pur mais en association avec d'autres éléments (alliages), essentiellement le silicium.

L'addition du silicium a pour avantages [13] :

- Une augmentation de la résistivité électrique, ce qui a pour effet de diminuer les pertes par courants de Foucault ;
- Un durcissement du métal, ce qui facilite la découpe des tôles minces ;
- Une diminution de l'anisotropie magnétocristalline du fer, ce qui facilite la rotation des moments magnétiques ;

Ces avantages sont au prix d'une diminution de la polarisation magnétique à saturation ( $J_s$ ) de l'acier qui décroît linéairement avec la concentration ( $C$ ) de l'alliage en élément d'addition, suivant la loi suivante [1] :

$$J_s = 2.155(1-108C) \text{ [Tesla]} .$$

L'autre inconvénient est lié à la diminution de la conductivité thermique des tôles, ce qui ne favorise pas l'évacuation de la chaleur.

Il existe deux types des tôles en fer-silicium :

1. Les tôles fer-silicium à grains non orientés.
2. Les tôles fer-silicium à grains orientés.

### **I.10.1.1 les tôles fer-silicium à grains non orientés**

Ces tôles sont utilisées pour la construction de tous les circuits magnétiques feuilletés fonctionnant en régime d'induction variable, à fréquence industrielle. On les trouve dans les machines tournantes.

Les épaisseurs utilisées varient de 0,7mm pour les qualités les moins noble contenant peu de silicium à 0,35mm pour les qualités les plus performantes [1].

### **I.10.1.2 Les tôles fer-silicium à grains orientés**

La découverte des tôles fer-silicium à grains orientés est généralement attribuée au métallurgiste américain N.P.Goss (1934).

Il s'agit d'une découverte fortuite, provenant de l'utilisation de laminages à froid et de traitement thermique successifs.

Toutes les tôles à grains orientés de fabrication industrielle mises sur le marché, quel qu'en soit le producteur, ont la même composition de base: une solution solide fer-silicium à la concentration pondérale de 3%. Moins riche en silicium, elles seraient moins performantes et plus coûteuses, on ne saurait pas les fabriquer.

Ces tôles sont destinées en priorité à la construction des noyaux de transformateurs qui fonctionnent très souvent dans un bain d'huile minérale pour l'isolation et le refroidissement du système [1].

## **CONCLUSION**

Dans ce chapitre, nous avons vu l'importance technologique des matériaux magnétiques qui mobilisent les chercheurs depuis des siècles. L'étude des sciences de ces matériaux nous a permis de comprendre les principales notions du magnétisme à différentes échelles.

L'étude des phénomènes qui se produisent dans les matériaux magnétiques est un travail nécessaire étant donné son importance, cette étude se fait avec l'emploi de certains outils mathématiques qui seront le but de chapitre suivant.

## II.1 Introduction

La plupart des dispositifs utilisés en électrotechnique sont, durant leurs fonctionnements, soumis à l'action de champs électromagnétiques.

La connaissance du champ permet donc, dans tout appareil électromagnétique, d'avoir accès au calcul des performances et du fonctionnement de cet appareil, soit en régime permanent, soit en régime transitoire.

Donc, l'évaluation des champs électriques et magnétiques apparaît comme un travail nécessaire, ce travail est effectué par l'emploi des équations de Maxwell et les relations du milieu considéré [14].

## II.2. Les équations électromagnétiques

Les diverses équations électromagnétiques permettent de décrire en modèle mathématique le comportement d'un système physique.

### II.2.1 Les équations de Maxwell

Tous les phénomènes électromagnétiques que l'on veut généralement étudier dans les dispositifs électrotechniques sont régis par les quatre équations de Maxwell et par les relations du milieu considéré [14]

Les équations de Maxwell sous leurs formes différentielles sont:

- Loi de Faraday – Maxwell:

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.1})$$

- Loi d'Ampère – Maxwell :

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II.2})$$

- Loi de Gauss – Maxwell :

$$\text{div}(\vec{D}) = \rho \quad (\text{II.3})$$

- Loi de conservation du flux magnétique

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{II.4})$$

Avec:

$\vec{B}$ : Vecteur d'induction magnétique, [T]

$\vec{D}$ : Vecteur déplacement électrique, [C/m<sup>2</sup>]

$\vec{E}$ : Vecteur champ électrique, [V/m]

$\vec{H}$ : Vecteur champ magnétique, [A/m]

$\vec{J}$ : Vecteur densité de courant électrique, [A/m<sup>2</sup>]

t: Le temps, [S]

$\rho$ : Charge volumique, [Ω.m]

## II.2.2 Interprétation physique des équations de Maxwell

### II.2.2.1 Les équations de couplages électromagnétiques

- Loi de Faraday – Maxwell:

$$\text{rot}(\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Cette équation exprime le couplage électromagnétique en régime dynamique ou la variation temporelle de  $\vec{B}$  détermine le  $\text{rot} \vec{E}$ .

- Loi d'Ampère – Maxwell :

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Cette équation exprime la dépendance du champ magnétique de la densité de courant total (conduction + déplacement).

### II.2.2.2 Les équations de conservations

- Loi de conservation du flux magnétique :

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$$

Cette relation traduit mathématiquement, qu'il n'existe pas de charges magnétiques car les seules sources de champ magnétique sont les courants électriques.

C'est pourquoi les lignes du champ sont toujours fermées sur elles-mêmes, elles forment des boucles. Ces boucles n'ont ; ni points de départs, ni points d'arrivées, ni points de convergence, d'où, la nomination d'induction conservative (champ conservatif).

- Loi de Gauss – Maxwell :

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \rho$$

Si on considère une surface (s) fermée, le flux de vecteur de déplacement électrique  $\vec{D}$  sortant de cette surface est égale à la charge totale contenue à l'intérieur de cette dernière.

### II.2.3 Forme intégrale des équations de Maxwell

Nous allons mettre les équations de Maxwell énoncées précédemment sous leur forme intégrale afin de mieux comprendre le sens physique de chacune.

#### II.2.3.1 Loi de Gauss – Maxwell

$$\iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_t}{\epsilon} \quad (\text{II.5})$$

Le flux du champ électrique sortant d'une surface fermée est égal à  $\frac{1}{\epsilon}$  fois la charge totale contenue à l'intérieur de cette surface.

#### II.2.3.2 Loi de faraday – Maxwell

$$\oint_c \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{II.6})$$

La force électromotrice induite le long d'un contour fermé est égale à l'opposé de la dérivé par rapport au temps du flux magnétique.

### II.2.3.3 Loi de conservation du flux magnétique

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{II.7})$$

Le flux magnétique sortant d'une surface fermée est toujours nul.

### II.2.3.4 Loi d'Ampère – Maxwell

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint (J_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{II.8})$$

La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé, est égale à la somme des courants embrassés par la surface délimitée par ce contour.

## II.2.4 Lois constitutives du milieu

### II.2.4.1 Milieu magnétique

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{II.9})$$

### II.2.4.2 Milieu diélectrique

Dans un diélectrique, on a :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{II.10})$$

### II.2.4.3 Matériau aimanté

$$\vec{B} = \mu_0 [\vec{H} + \vec{M}] \quad (\text{II.11})$$

Avec :

$$\vec{M} = \chi \vec{H}$$

$\vec{M}$  : Vecteur aimantation magnétique du matériau.

$\chi$  : Susceptibilité magnétique du matériau.



## II.2.5 Loi d'Ohm

C'est l'une des premières lois expérimentées au sujet des courants électriques. En réalité, il ne s'agit pas d'un principe fondamental, mais d'une propriété de certains matériaux qui présentent une relation linéaire entre la tension et le courant [15], les métaux comme exemple :

$$\vec{V} = R \vec{I}$$

Où  $R$  est la résistance du conducteur.

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

Nous désignons par  $L$  la longueur du dispositif, et  $S$  sa section.

En faisant l'hypothèse que le courant est uniformément réparti sur la surface, nous aurons alors:

$$\vec{I} = S \vec{J}$$

De même, on suppose que le champ électrique est lui aussi uniforme et parallèle au dispositif, on peut donc écrire :

$$\vec{V} = L \vec{E}$$

Nous obtenons la loi d'Ohm en tout point du matériau :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{II.12}$$

Où :

$\sigma = \frac{1}{\rho}$ , conductivité électrique du matériau.

### II.2.5.1 Milieu conducteur avec source

La loi d'Ohm pour un milieu conducteur avec source s'écrit :

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \sigma \vec{E} \tag{II.13}$$

Où  $\vec{J}_s$  vecteur des courants de source.

### II.2.5.2 Milieu conducteur en mouvement

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{II.14})$$

Avec :

$\vec{v}$  : Vitesse de déplacement du milieu en mouvement [m/s].

## II.3 Continuité à l'interface entre deux milieux différents

Au passage entre deux milieux différents, le potentiel doit être continu, car s'il y avait une discontinuité, il y aurait un champ électrique infiniment grand, ce qui est physiquement impossible [16].

### II.3.1 Discontinuité de la composante normale du déplacement électrique si les charges surfaciques existent

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = \mathcal{G}_t \quad (\text{II.15})$$

Avec  $\mathcal{G}_t$  charges surfaciques.

### II.3.2 Continuité de la composante tangentielle du champ électrique

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{n} = 0 \quad (\text{II.16})$$

### II.3.3 Continuité de la composante normale de l'induction magnétique

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{II.17})$$

### II.3.4 Discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique si les courants surfaciques existent

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{n} = \vec{k}_s \quad (\text{II.18})$$

Où :

$\vec{n}$  vecteur unitaire, normale à la surface dirigé du milieu 1 à 2.

$\vec{k}_s$  densité de courant surfacique.

## II.4 Equation de continuité

La charge libre passant à travers une surface durant un intervalle de temps doit être égale à la charge libre perdue par le volume entouré par cette surface durant ce même intervalle de temps [16] :

$$\iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} d\vec{v} \quad (\text{II.19})$$

Nous pouvons aussi écrire cette loi sous une forme différentielle :

$$\iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) d\vec{v}$$

Nous obtenons :

$$\iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) d\vec{v} = - \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} d\vec{v}$$

Alors :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{II.20})$$

## II.5.4 Les conditions aux limites

### II.5.4.1 La condition de Dirichlet

Elle impose la continuité sur l'adhérence de l'ouvert du plan sur lequel est définie la solution considérée, c'est-à-dire sur ce plan est sa frontière [17].

$$U = A \quad (\text{II.21})$$

### II.5.4.2 La condition de Neumann

Elle impose à la solution  $U$  d'être continue sur l'adhérence de l'ouvert du plan et sa frontière et d'admettre en tout point de la frontière une dérivée  $\frac{\partial U}{\partial n}$  suivant le vecteur normal  $\vec{n}$  orienté vers l'extérieur de la frontière du plan égale à une fonction donnée [17].

$$\frac{\partial U}{\partial n} = A \quad (\text{II.22})$$

### II.5.4.3 La condition mixte Dirichlet - Neumann :

$$\frac{\partial U}{\partial n} + U = A \quad (\text{II.23})$$

### II.5.4.4 La condition de périodicité

$$U(x+X)=U(x) \quad (\text{II.24})$$

Où X est la période magnétique.

La condition de périodicité est utilisée à fin de réduire le domaine d'étude.

## II.6 Formulation électromagnétique du problème

Nous allons établir dans cette partie la formulation du problème électromagnétique à résoudre pour notre structure.

### II.6.1 Choix de la formulation

Dans notre étude, nous considérons une tôle ferromagnétique (figure 2.1) soumise à un champ magnétique variable dans le temps et homogène appliqué dans le sens transversal (figure 2.2). La formulation qui convient est alors la formulation magnétodynamique en champ magnétique H.

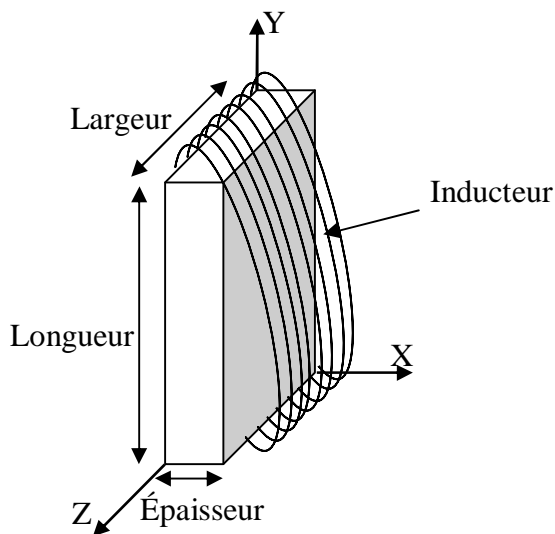


Figure 2.1 Géométrie du dispositif

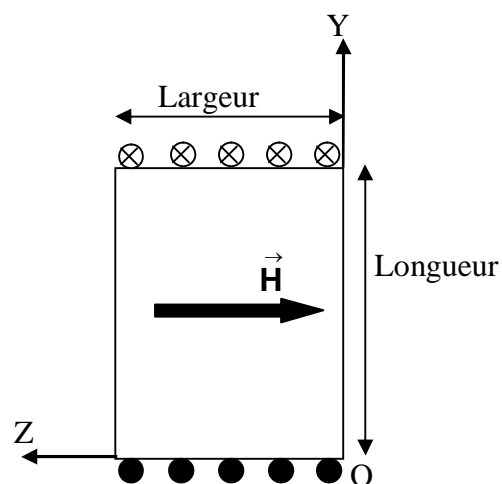


Figure 2.2 Représentation des lignes de champ

Nous supposons que le champ magnétique ne varie pas suivant la largeur de la tôle :

$$\vec{H} = H \vec{k}$$

Avec  $\vec{k}$  vecteur unitaire suivant l'axe (oz).

Ainsi nous pouvons modéliser ce système en deux dimensions (x,y).

## II.6.2 Formulation magnétodynamique en terme de champ magnétique

Dans ce qui suit, nous allons établir le modèle mathématique du phénomène magnétique en régime dynamique en utilisant les outils présentés précédemment, la variable sera le champ magnétique H dans le but de simplifier les calculs puisque l'objectif du présent travail est de déterminer les pertes par courants de Foucault.

Le dispositif à étudier est un milieu induit dans lequel les courants source sont nuls, alors, on a :

$$\vec{J} = \vec{J}_c$$

L'équation (II.2) devient :

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

On applique le rotationnel aux deux membres de l'équation précédente.

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{H})) = \text{rot}\left(\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \quad (\text{II.25})$$

La fréquence f égale à 50 Hz est inférieure à  $10^{12}$  Hz, d'où :

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ll \vec{J}_c$$

Alors, l'équation (II.25) devient :

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{H})) = \text{rot}(\vec{J}_c) \quad (\text{II.26})$$

La combinaison des équations (II.1) et (II.9) et (II.12) donne l'équation suivant :

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\sigma} \vec{J}_c\right) = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Comme  $\sigma$  est constante, alors :

$$\frac{1}{\sigma} \text{rot}(\vec{J}_c) = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

En multipliant l'équation (II.26) par  $\frac{1}{\sigma}$ , on aura :

$$\frac{1}{\sigma} \text{rot}(\text{rot}(\vec{H})) = \frac{1}{\sigma} \text{rot}(\vec{J}_c)$$

D'où :

$$\frac{1}{\sigma} \text{rot}(\text{rot}(\vec{H})) = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Le plan d'étude est [x, y], alors :

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{H})) = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2}$$

On a alors :

$$\frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} \right) = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Si on remplace  $\frac{\partial}{\partial t}$  par  $j\omega$ , on aura l'équation suivante :

$$\frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} \right) + j\omega\mu \cdot \vec{H} = 0 \quad (\text{II.27})$$

Avec  $\omega$  pulsation électrique.

L'équation (II.27) est l'équation magnétodynamique en terme de champ magnétique H.

## CONCLUSION

Dans ce présent chapitre, nous nous sommes intéressés à la présentation des outils décrivant en modèles mathématiques les phénomènes engendrés dans les matériaux magnétiques, nous avons aussi établi la formulation magnétodynamique en terme de champ magnétique, le modèle mathématique obtenu est sous forme d'une équation aux dérivées partielles qu'il faut résoudre pour aboutir à une solution finale (solution numérique), pour cela, nous ferons appel aux méthodes numériques.

L'une des méthodes numériques utilisée en électrotechnique, est la méthode des éléments finis qui sera l'objet du chapitre suivant.

### III.1 Introduction

Introduite en électromagnétisme par M.V.K.Chari et P.P. Sylvester vers 1970, la méthode des éléments finis a connue un essor considérable. Le développement de la méthode permet actuellement de traiter différents types de problème couplés : magnétothermique, électromagnétique, électromagnétique-mécanique et magnétohydrodynamique.

Le principe de la méthode est basé sur une formulation intégrale du problème aux dérivées partielles et de leurs conditions aux limites, cette formulation peut être de type variationnelle ou résidus pondérés [18].

### III.2 Formulation intégrale

Nous allons exposer les deux formulations intégrales qui sont le plus couramment utilisées dans la méthode des éléments finis pour le calcul du champ électromagnétique: formulation variationnelle et la formulation des résidus pondérés [14].

#### III.2.1 Formulation variationnelle:

La formulation variationnelle nécessite la connaissance à priori de la fonctionnelle d'énergie du système à étudier. Celle-ci est déterminée à partir du principe de l'action hamiltonienne qui stipule l'existence d'une fonctionnelle type intégrale, définie par [19] :

$$F(A) = \int_{\Omega} L d\Omega \quad (\text{III.1})$$

L: est la fonction de Lagrange résultante de la co-énergie du système de type cinétique et de son énergie potentielle.

$\Omega$ : est le domaine d'étude.

Dans le cas d'un problème magnétique, la fonction L est donnée par:

$$L = \int_0^B v B dB - JA \quad (\text{III.2})$$

La fonction d'énergie est donnée alors comme suit :

$$F(A) = \int_{\Omega} \left[ \int_0^B v B dB - J A \right] d\Omega \quad (\text{III.3})$$

Où

$v$ : est la réductivité magnétique

$B$ : l'induction magnétique

$J$ : la densité de courant

$A$ : le potentiel vecteur magnétique

La résolution du problème variationnel ainsi défini, revient à minimiser la fonctionnelle d'énergie  $F(A)$ , la minimisation est effectuée en utilisant le principe de Rayleigh-Ritz qui consiste à écrire:

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A} = 0 \quad (\text{III.4})$$

Ou:

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_2} = \dots = \frac{\partial F(A)}{\partial A_N} = 0 \quad (\text{III.5})$$

Avec:

$N$ : le nombre de nœuds du domaine d'étude.

$A_i$ : est l'inconnue au nœud  $i$  du domaine.

### III.2.2 Méthode des résidus pondérés

La méthode des résidus pondérés est basée sur la détermination du résidu défini par:

$$R = L(A) - f \quad (\text{III.6})$$

Où:

$R$ : représente le résidu de l'approximation.

$L$ : opérateur différentiel

$F$ : fonction définie sur le domaine d'étude  $\Omega$ .

$A$ : est la fonction inconnue.



La méthode des résidus pondérés consiste à trouver les fonctions  $A$  qui annulent la forme intégrale suivante :

$$\iint_{\Omega} R_i \Psi_i d\Omega = 0$$

$\Psi_i$  : est une fonction de projection définie sur  $\Omega$ .

Les valeurs de  $A$  qui permettent d'annuler l'intégrale, sont solutions du système algébrique obtenu.

Les choix des fonctions de projection permettent de définir plusieurs méthodes, parmi elles, on cite :

- La méthode de collocation par points.
- La méthode des moindres carrés.
- La méthode de Galerkin, appelée aussi Pétrov-Galerkin.

La méthode de collocation par points utilise les fonctions de Dirac, celle des moindres carrés est basée sur la minimisation de la norme quadratique de l'erreur sur l'équation et les conditions aux limites [19].

La méthode de Galerkin consiste à choisir des fonctions de projection identiques aux fonctions d'approximation.

On s'intéressera à la méthode de Galerkin, elle est plus utilisée en électrotechnique, vu qu'elle conduit à un système matriciel symétrique.

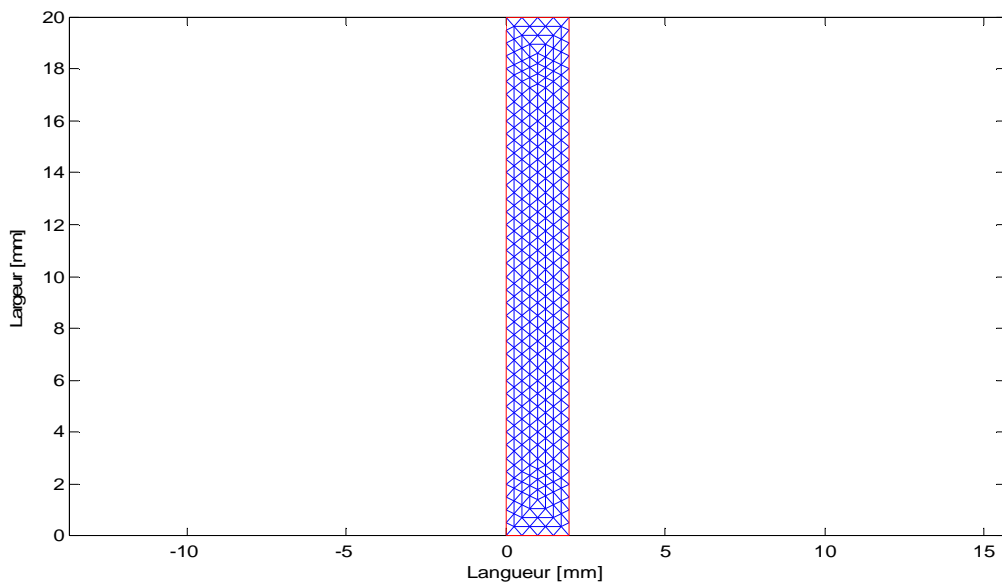
### **Remarque:**

Les deux approches, variationnelle et projective, ont le même ordre de précision; mais la méthode projective est plus employée vu qu'elle peut s'appliquer à toute équation sans avoir recours à la connaissance ou l'existence d'une fonctionnelle d'énergie du système étudié [19,20].

### III.3 Discrétisation

Une fois l'équation aux dérivées partielles est transformée en une forme intégrale, on passe à l'étape de discrétisation qui consiste à subdiviser le domaine concerné en un nombre fini de sous domaines appelés «Eléments», dont la géométrie est préalablement choisie. Cette étape est très importante dans l'analyse par élément fini, car l'espace de stockage sur ordinateur, le temps de calcul et la précision de la solution en dépendent.

Le maillage respecte les règles dites de conformité. Les éléments ne se recouvrent pas et deux éléments sont voisins, soit par un sommet commun, soit par une arête qu'ils partagent alors entièrement.

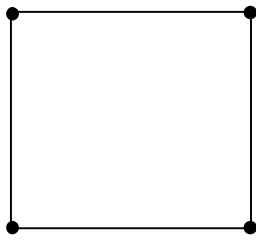


**Figure 3.1:** Discrétisation d'un domaine par le maillage.

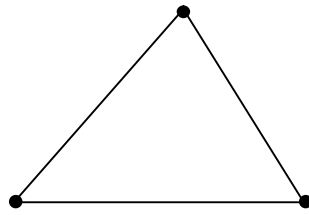
#### III.3.1 Élément de référence

Les éléments de référence utilisés pour la subdivision du domaine sont des éléments simples, comme le triangle, le rectangle, le tétraèdre et le parallélépipède, pour les quels on associe un système de coordonnées normées, dans le but de définir pour chaque type d'élément, la fonction d'interpolation associée. Une fois cette dernière est construite, on obtient les fonctions associées au système réel à l'aide de transformations géométriques.

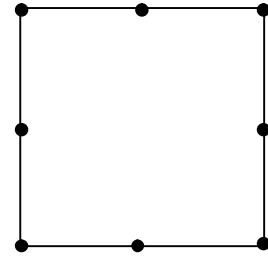
Pour des domaines d'étude à une, deux ou trois dimensions, on rencontre généralement des éléments linéaires, quadratiques ou cubiques.



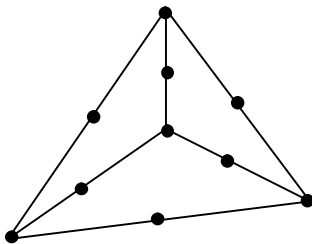
Élément linéaire carré



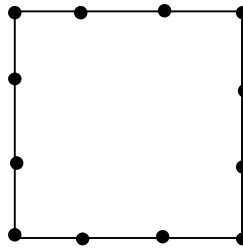
Élément linéaire triangulaire



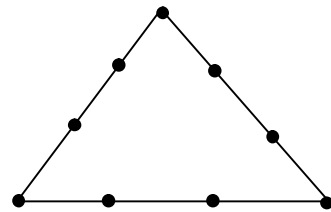
Élément quadratique carré



Élément quadratique tétraèdre



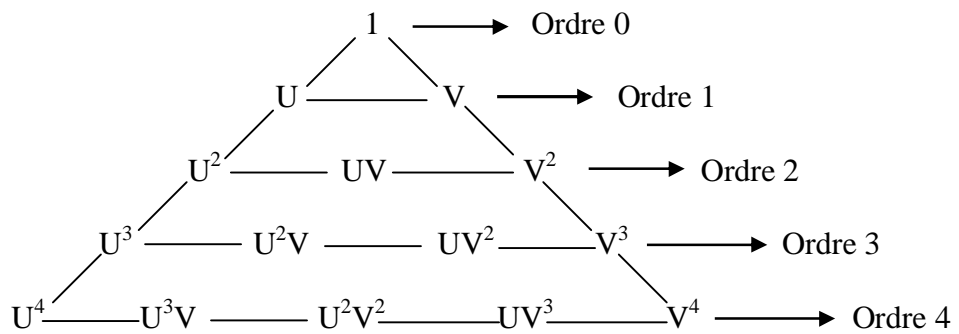
Élément cubique carré



Élément cubique triangulaire

### III.4 Fonction d'interpolation

Les fonctions d'interpolation sont obtenues à partir du triangle de Pascal donné ci dessous:



Triangle de Pascal

Leur construction doit vérifier deux principes:

#### 1) Le principe de l'état complet

- le nombre de termes de la fonction doit être égal au nombre de nœuds de l'élément.
- la fonction doit contenir un terme constant.

## 2) Le principe de compatibilité

Celui-ci veut dire que la fonction doit être continue.

### III.5 Fonction d'approximation sur un élément 2D

Sur le domaine ( $\Omega$ ), nous choisirons un ensemble de  $n$  nœuds d'interpolations de coordonnées  $(x_i, y_i)$ . Sur chaque élément ( $\Omega^e$ ), nous utiliserons une approximation nodale de la fonction exacte  $U(x,y)$ .

$$U^e(x,y) = \left\langle N_1^e(x,y) \quad N_2^e(x,y) \quad \dots \quad N_{n_e}^e(x,y) \right\rangle \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \\ U_3^e \\ \vdots \\ U_{n_e}^e \end{Bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

$U^e(x,y)$  fonction d'approximation sur l'élément  $e$ .

$U_1^e, U_2^e$  et  $\dots, U_{n_e}^e$  sont les valeurs de  $U(x,y)$  aux nœuds d'interpolation de l'élément.

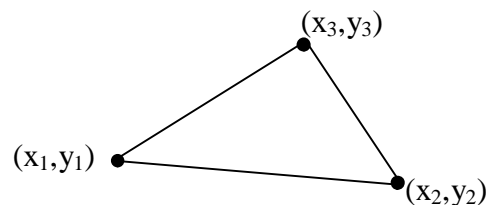
$N_1^e(x,y), N_2^e(x,y), N_3^e(x,y), \dots, N_{n_e}^e(x,y)$  sont les fonctions de forme ou d'interpolation sur l'élément.

$n_e$  est le nombre de nœuds d'un élément.

Les fonctions d'interpolation dépendent des coordonnées des nœuds de l'élément et sont différentes pour chaque élément.

#### III.5.1 Cas d'un élément triangulaire linéaire 2D

Dans le cas où l'élément de référence est un triangle linéaire, les fonctions d'interpolation sont calculées comme suit :



A partir du triangle de Pascal, on trouve que :

$$U(x,y) = a + bx + cy$$

On pose  $U_1, U_2, U_3$  les valeurs de la fonction respectivement aux nœuds 1, 2, 3.

Dans chaque point, on a :

$$U(x_1, y_1) = a + bx_1 + cy_1 = U_1$$

$$U(x_2, y_2) = a + bx_2 + cy_2 = U_2$$

$$U(x_3, y_3) = a + bx_3 + cy_3 = U_3$$

On obtient le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_2y_3 - y_2x_3 & x_3y_1 - y_3x_1 & x_1y_2 - y_1x_2 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$\det = \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det &= (x_2y_3 - x_3y_2) - x_1(y_3 - y_2) + y_1(x_3 - x_2) \\ &= x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 + x_1y_2 + y_1x_3 - y_1x_2 \end{aligned}$$

On ajoute et on soustrait le terme  $y_3x_3$  à l'expression du déterminant.

$$\begin{aligned} \det &= x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 + x_1y_2 + y_1x_3 - y_1x_2 + y_3x_3 - y_3x_3 \\ &= y_2(x_1 - x_3) - y_3(x_1 - x_3) - y_3(x_3 - x_2) + y_1(x_3 - x_2) \\ &= (y_2 - y_3)(x_1 - x_3) - (y_3 - y_1)(x_3 - x_2) \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\det = 2\Delta$$

Avec  $\Delta$  l'aire du triangle.

Alors :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 & x_3 y_1 - y_3 x_1 & x_1 y_2 - y_1 x_2 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

Et :

$$U(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$U(x, y) = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 & x_3 y_1 - y_3 x_1 & x_1 y_2 - y_1 x_2 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

On trouve que :

$$U = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$N_1 = \frac{1}{2\Delta} [(x_2 y_3 - y_2 x_3) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

$$N_2 = \frac{1}{2\Delta} [(x_3 y_1 - y_3 x_1) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

$$N_3 = \frac{1}{2\Delta} [(x_1 y_2 - y_1 x_2) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$

Pour chaque élément du domaine, on a alors :

$$U^e(x, y) = \begin{bmatrix} N_1^e & N_2^e & N_3^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \\ U_3^e \end{bmatrix}$$

$$N_1^e = \frac{1}{2\Delta^e} (a_1^e + b_1^e x + c_1^e y)$$

$$N_2^e = \frac{1}{2\Delta^e} (a_2^e + b_2^e x + c_2^e y) , \quad N_3^e = \frac{1}{2\Delta^e} (a_3^e + b_3^e x + c_3^e y)$$

Avec :

$$a_1^e = x_2^e y_3^e - y_2^e x_3^e \quad b_1^e = y_2^e - y_3^e \quad c_1^e = x_3^e - x_2^e$$

$$a_2^e = x_3^e y_1^e - y_3^e x_1^e \quad b_2^e = y_3^e - y_1^e \quad c_2^e = x_1^e - x_3^e$$

$$a_3^e = x_1^e y_2^e - y_1^e x_2^e \quad b_3^e = y_1^e - y_2^e \quad c_3^e = x_2^e - x_1^e$$

$$\Delta^e = \frac{1}{2} (b_1^e c_2^e - b_2^e c_1^e)$$

### III.6 Fonction d'approximation sur le domaine 2D

Les fonctions  $U^e(x,y)$  doivent être construites sur chaque élément, de manière à être continues sur chacun.

Dans un domaine global à  $N_e$  éléments, l'inconnue s'exprime par assemblage de toutes les fonctions élémentaires :

$$U(x, y) = \sum_{e=1}^{N_e} U^e(x, y) \quad (\text{II.9})$$

### III.7 Avantages et les inconvénients de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis présente les avantages et les inconvénients suivants [21]:

#### Les avantages:

- Adaptation aux géométries complexes.
- Prise en compte des non linéarités.
- Temps de calcul relativement avantageux.

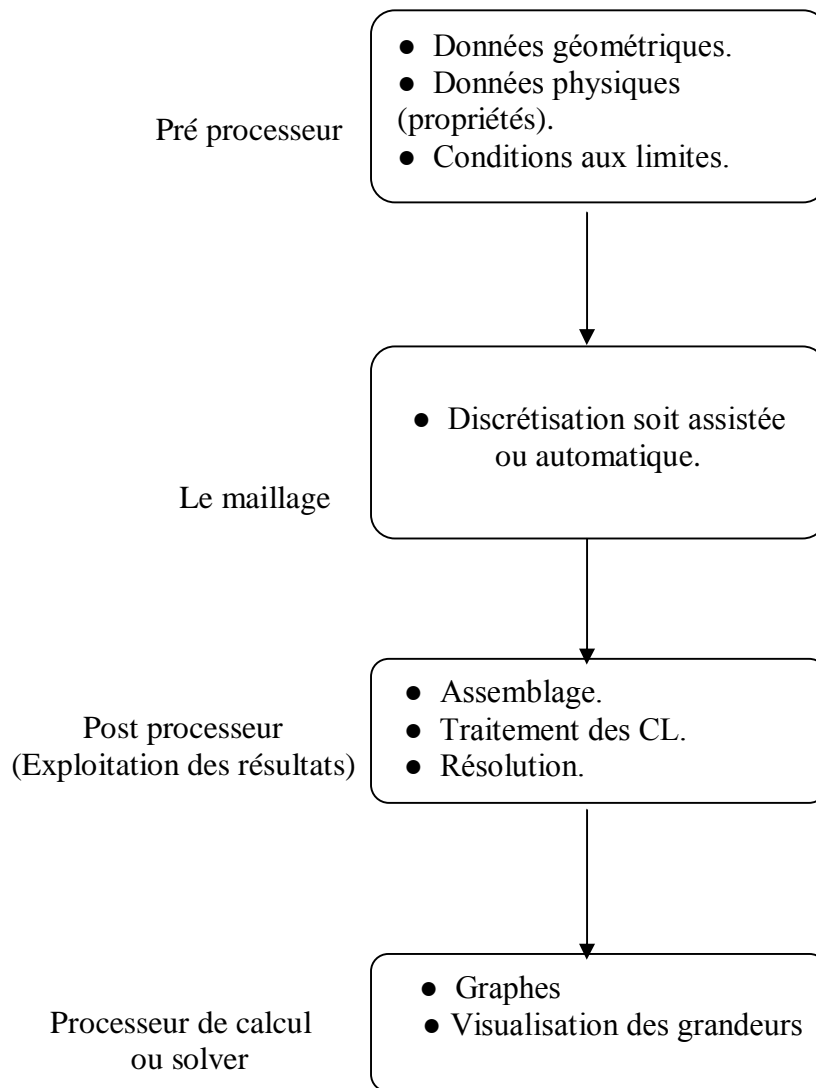
#### Les inconvénients:

- Inapplicable sur les domaines infinis.
- Présence des singularités dans le domaine d'étude.
- Mise en oeuvre relativement difficile.

### III.8 Implémentation de la méthode des éléments finis

La mise en œuvre de la méthode des éléments finis débouche inévitablement sur un logiciel qui lui est associé. Si, lors des premières tentatives de calcul par la méthode des éléments finis, on écrivait, pour chaque nouveau problème, un programme différent tenant compte de sa géométrie particulière, de ses particularités physiques et de ses conditions aux limites, on s'oriente aujourd'hui vers la réalisation de logiciels généraux dont la structure informatique est adaptée au traitement d'un grand nombre de problèmes d'un même type [14].

Ces logiciels ont pratiquement tous la structure représentée sur la figure 3.2 qui consiste en un programme séparé en quatre grands blocs : le pré processeur, le mailleur, le solveur et le post processeur.



**Figure 3.2 :** Organisation du logiciel

### III.9 Résolution de l'équation magnétodynamique par la méthode des éléments finis

L'équation magnétodynamique établie dans le chapitre II est la suivante :

$$\frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) + j\omega\mu H = 0$$



### III.9.1 Ecriture intégrale de l'équation

Pour mettre l'équation magnétodynamique en forme intégrale, nous utiliserons la Formulation des résidus pondérés.

On pose

$$L(H) = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) + j\omega\mu \cdot H$$

$$F=0$$

Le résidu R s'écrit alors :

$$R = L(H) - F$$

La méthode des résidus pondérés consiste à trouver les fonctions H qui annulent la forme intégrale suivante :

$$\iint_{\Omega} \Psi R(H) d\Omega$$

$\Omega$  représente le domaine sur lequel est définie la fonction H , et  $\Psi$  une fonction quelconque définie aussi sur  $\Omega$ .

On a à résoudre l'équation suivante :

$$\iint_{\Omega} \Psi \left[ \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) + j\omega\mu H \right] d\Omega = 0$$

Cette dernière équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\iint_{\Omega} \Psi \left[ \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) + j\omega\mu H \right] dx dy = 0$$

$$\frac{1}{\sigma} \iint_{\Omega} \left( \Psi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \Psi \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) dx dy + j\omega\mu \iint_{\Omega} \Psi H dx dy = 0 \quad (III.10)$$

Pour rendre l'équation (III.10) plus simple, il faut calculer le terme :

$$\iint_{\Omega} \left( \Psi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \Psi \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) dx dy$$

$$\iint_{\Omega} \left( \Psi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \Psi \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) dx dy = \iint_{\Omega} \Psi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} dx dy + \iint_{\Omega} \Psi \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} dx dy$$

On a :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \Psi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

Alors :

$$\Psi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x}$$

De même, on trouve que :

$$\Psi \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \Psi \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y}$$

Alors :

$$\iint_{\Omega} \Psi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} dx dy + \iint_{\Omega} \Psi \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} dx dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} dx dy + \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi \frac{\partial H}{\partial x} \right) dx dy - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} dx dy + \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left( \Psi \frac{\partial H}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\iint_{\Omega} \left( \Psi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \Psi \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) dx dy = - \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Psi \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right) dx dy$$

On pose:

$$\vec{f} = \Psi \frac{\partial H}{\partial x} \vec{i} + \Psi \frac{\partial H}{\partial y} \vec{j}$$

On a:

$$\text{div}(\vec{f}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Psi \frac{\partial H}{\partial y} \right)$$

En utilisant le théorème de divergence qui énonce que :

$$\iint_{\Omega} \text{div}(\vec{f}) dx dy = \oint_{\Gamma} \vec{f} \cdot \vec{n} d\Gamma$$

Où :

$\Gamma$  est le contour entourant le domaine  $\Omega$ .

On aboutit à la relation suivante :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Psi \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right) dx dy &= \oint_{\Gamma} \left( \Psi \frac{\partial H}{\partial x} \vec{i} + \Psi \frac{\partial H}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot \vec{n} d\Gamma \\ &= \oint_{\Gamma} \Psi \left( \frac{\partial H}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial H}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot \vec{n} d\Gamma \end{aligned}$$

Comme :

$$\left( \frac{\partial H}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial H}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot \vec{n} = \frac{\partial H}{\partial n}$$

Alors :

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Psi \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right) dx dy = \oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial H}{\partial n} d\Gamma$$

D'où :

$$\iint_{\Omega} \left( \Psi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \Psi \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) dx dy = - \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} \right) dx dy + \oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial H}{\partial n} d\Gamma$$

L'équation (III.10) devient :

$$-\frac{1}{\sigma} \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} \right) dx dy + \oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial H}{\partial n} d\Gamma + j\omega\mu \iint \Psi H dx dy = 0 \quad (\text{III.11})$$

### III.9.2 Application des conditions aux limites

Dans notre système, la tôle baigne dans champ magnétique dont la valeur est connue, alors, la condition aux limites qui convient est la condition de Dirichlet :

$$H = C$$

Tel que C est une constante.

D'où :

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0$$

L'équation (III.11) se simplifie en :

$$-\frac{1}{\sigma} \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} \right) dx dy + j\omega\mu \iint \Psi H dx dy = 0 \quad (\text{III.12})$$

### III.9.3 Discrétisation

La subdivision par la méthode des éléments finis permet de trouver une approche à la solution cherchée H dans l'élément de domaine subdivisé (élément triangulaire linéaire), cette solution approchée sera de la forme suivante :

$$H^e = \sum_{i=1}^3 H_i \times N_i^e$$

Avec :

$H_i$  est la valeur du champ magnétique au nœud considéré.

$N_i^e$  fonction d'interpolation nodale.

### III.9.4 Interpolation éléments finis

En remplaçant H par sa solution approchée dans l'équation (III.12), on trouve :

$$-\frac{1}{\sigma} \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \left( \sum_0^3 H_i N_i^e \right)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \left( \sum_0^3 H_i N_i^e \right)}{\partial y} \right) dx dy + j\omega\mu \iint_{\Omega^e} \left( \Psi \sum_0^3 H_i N_i^e \right) dx dy = 0$$

Avec  $\Omega^e$  sous domaine.

La méthode Galerkin permet d'identifier la fonction inconnue  $\Psi$ , en mettant :

$$\Psi = N_j^e$$

Finalement, on a :

$$-\frac{1}{\sigma} \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial \left( \sum_0^3 H_i N_i^e \right)}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial \left( \sum_0^3 H_i N_i^e \right)}{\partial y} \right) dx dy + j\omega\mu \iint_{\Omega^e} (N_j^e \sum_0^3 H_i N_i^e) dx dy = 0$$

En développant l'équation précédente, on aboutit à l'équation suivante :

$$-\frac{1}{\sigma} \sum_1^3 \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) dx dy \{H_i\} + j\omega\mu \sum_1^3 \iint_{\Omega^e} N_j^e N_i^e dx dy \{H_i\} = 0 \quad (\text{III.13})$$

L'écriture matricielle de l'équation (III.13) est la suivante :

$$-[K^e]\{H_i\} + j\omega[T^e]\{H_i\} = 0 \quad (\text{III.14})$$

Les éléments élémentaires des matrices  $K^e$  et  $T^e$  sont donnés par :

$$K_{ij}^e = \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dx dy$$

$$T_{ij}^e = \iint_{\Omega^e} \sigma\mu N_i^e N_j^e dx dy$$

### Remarque

Les matrices  $K^e$  et  $T^e$  sont des matrices symétriques. On a alors :

$$K_{ij}^e = K_{ji}^e \quad \text{et} \quad T_{ij}^e = T_{ji}^e$$

### III.9.5 Calcul des termes élémentaires des matrices $K^e$ et $T^e$

Nous avons :

$$N_i^e = \frac{1}{2\Delta^e} (a_i^e + b_i^e x + c_i^e y)$$

$$N_j^e = \frac{1}{2\Delta^e} (a_j^e + b_j^e x + c_j^e y)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta^e} b_i^e & \text{et} & & \frac{\partial N_j^e}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta^e} b_j^e \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} &= \frac{1}{2\Delta^e} c_i^e & & & \frac{\partial N_j^e}{\partial y} &= \frac{1}{2\Delta^e} c_j^e \end{aligned}$$

D'où :

$$K_{ij}^e = \frac{1}{4(\Delta^e)^2} (b_i^e b_j^e + c_i^e c_j^e) \iint_{\Omega^e} dx dy$$

$$K_{ij}^e = \frac{1}{4\Delta^e} (b_i^e b_j^e + c_i^e c_j^e)$$

Pour calculer les termes élémentaires  $T_{ij}$ , on utilise la formule de base suivante :

$$\iint_{\Omega^e} (N_1^e)^l (N_2^e)^m (N_3^e)^n dx dy = \frac{l!m!n!}{(l+m+n+2)!} 2\Delta^e$$

On a :

$$T_{ij}^e = \iint_{\Omega^e} \sigma \mu N_i^e N_j^e dx dy = \sigma \mu \iint_{\Omega^e} N_i^e N_j^e dx dy$$

On distingue deux cas :

- Si  $i \neq j$  :

$$T_{ij}^e = \sigma \mu \iint_{\Omega^e} (N_i^e)^1 (N_j^e)^1 dx dy = \sigma \mu \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} 2\Delta^e$$

$$T_{ij}^e = \sigma \mu \frac{\Delta^e}{12}$$

- Si  $i = j$  :

$$T_{ij}^e = \sigma \mu \iint_{\Omega^e} N_i^e N_i^e dx dy = \sigma \mu \iint_{\Omega^e} (N_i^e)^2 dx dy$$

$$T_{ij}^e = \sigma \mu \frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!} 2\Delta^e$$

$$T_{ij}^e = \sigma \mu \frac{\Delta^e}{6}$$

On a :

$$K_{ij}^e = \frac{1}{4\Delta^e} (b_i^e b_j^e + c_i^e c_j^e)$$

$$T_{ij}^e = \begin{cases} \sigma \mu \frac{\Delta^e}{12} & i \neq j \\ \sigma \mu \frac{\Delta^e}{6} & i = j \end{cases}$$

### III.9.6 Assemblage

La subdivision du domaine complet en sous domaines (éléments) donne un nombre « ne » d'éléments et « nn » de nœuds. L'assemblage des matrices élémentaires de tous les éléments donne le système matriciel suivant :

$$[K]\{H\} = 0$$

Avec :

$$[K] = \sum_1^{ne} [K^e] + \sum_1^{ne} [T^e]$$

Et

$$\{H\} = \sum_1^{ne} \{H^e\}$$

On note que la matrice carrée K sera de l'ordre  $nn \times nn$ , et le vecteur V de l'ordre  $nn \times 1$ .

## CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes étapes de la méthode des éléments finis qui nécessite une transformation du problème à résoudre en forme intégrale, nous avons aussi vu comment construire les fonctions d'interpolation associées à une subdivision triangulaire.

La formulation intégrale et le calcul des fonctions d'interpolation sont les deux étapes les plus importantes, ce que nous avons constaté dans la résolution de l'équation magnétodynamique en terme du champ magnétique établie dans le chapitre précédent.

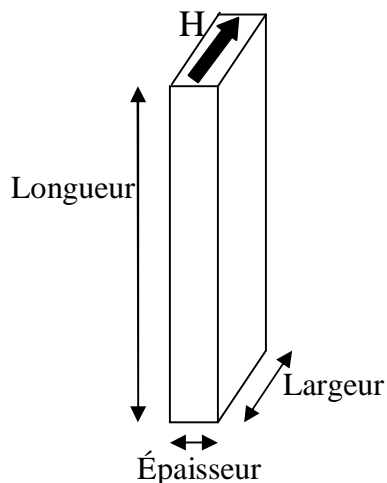
## IV.1 Introduction

Les difficultés rencontrées lors de la modélisation numérique par éléments finis sont liées au problème d'échelle. En effet, la discrétiser en éléments finis engendre un très grand nombre d'éléments, ce qui serait très coûteux en espace mémoire et en temps de calcul.

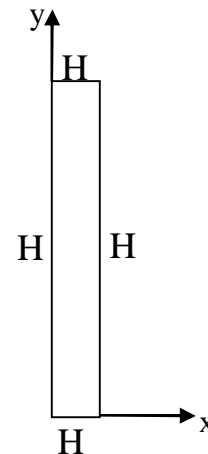
Le but de cette partie du travail est de déterminer les pertes par courants de Foucault pour une tôle magnétique, en régime linéaire et non linéaire.

## IV.2 Présentation du dispositif

La structure à étudier est constituée d'une tôle ferromagnétique baignant dans un champ magnétique variable dans le temps et homogène, orienté suivant la direction de la largeur (figure 4.1).



**Figure 4.1** : Géométrie de la tôle

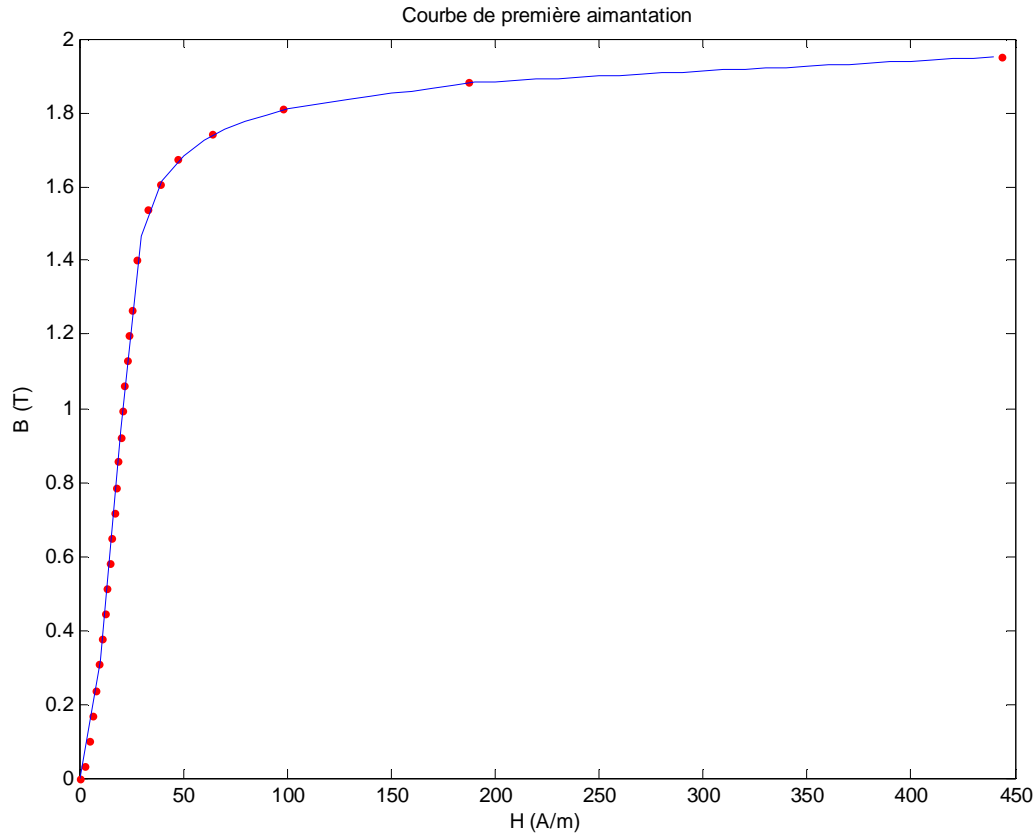


**Figure 4.2** : Géométrie modélisée et conditions aux limites

Cette tôle est utilisée par l'entreprise ENEL d'AZAZGA, c'est une tôle à grains orientés à 3% de silicium, ses propriétés physiques et géométriques sont données dans le tableau suivant.

Donnée physique	Valeur	Unité
Longueur de la tôle	0.28	Mètre
Largeur de la tôle	0.03	Mètre
Epaisseur de la tôle	0.003	Mètre
Conductivité électrique de la tôle	$2,3 \cdot 10^6$	Siemens par mètre
Masse volumique de la tôle	$7,65 \cdot 10^3$	Kg/m <sup>3</sup>

À ces propriétés physiques, s'ajoute la courbe de première aimantation relevée expérimentalement au laboratoire de l'ENEL sur l'échantillon **asmet8RV** :



**Figure 4.3** : Courbe de première aimantation expérimentale

### IV.3 Calcul des courants induits

Après avoir résolu la formulation magnétodynamique en terme de champ magnétique (équation II.26) qui convient à notre problème par la méthode des éléments finis (voir chapitre III), nous avons mis en œuvre un code de calcul éléments finis sous MATLAB qui nous a permis de déterminer la valeur numérique des courants induits en s'articulant sur l'équation II.2 simplifiée.

Les courants induits sont donnés par l'équation suivante :

$$\vec{J} = \frac{\partial H}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial H}{\partial x} \vec{j} \quad (\text{IV.1})$$



#### IV.4 Calcul des pertes par courants de Foucault

Les pertes par courants de Foucault qui en résultent dans une tôle ferromagnétique soumise à un champ magnétique variable dans le temps valent:

$$P_j = RI^2 \quad [\text{W}] \quad (\text{IV.3})$$

Or :

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S}$$

Et

$$I = JS$$

Alors, l'expression des pertes peut être écrite sous la forme suivante.

$$P_j = \frac{1}{\sigma} J^2 S \cdot l \quad [\text{W}] \quad (\text{IV.4})$$

Les pertes par courants de Foucault à l'intérieur d'un élément du maillage sont données par :

$$P_{\text{Jel}} = \frac{1}{\sigma} J^2 S_{\text{el}} \quad [\text{W/m}] \quad (\text{IV.4})$$

Ou bien :

$$P_{\text{Jel}} = \frac{1}{\sigma} J^2 \quad [\text{W/m}^3] \quad (\text{IV.5})$$

Avec :

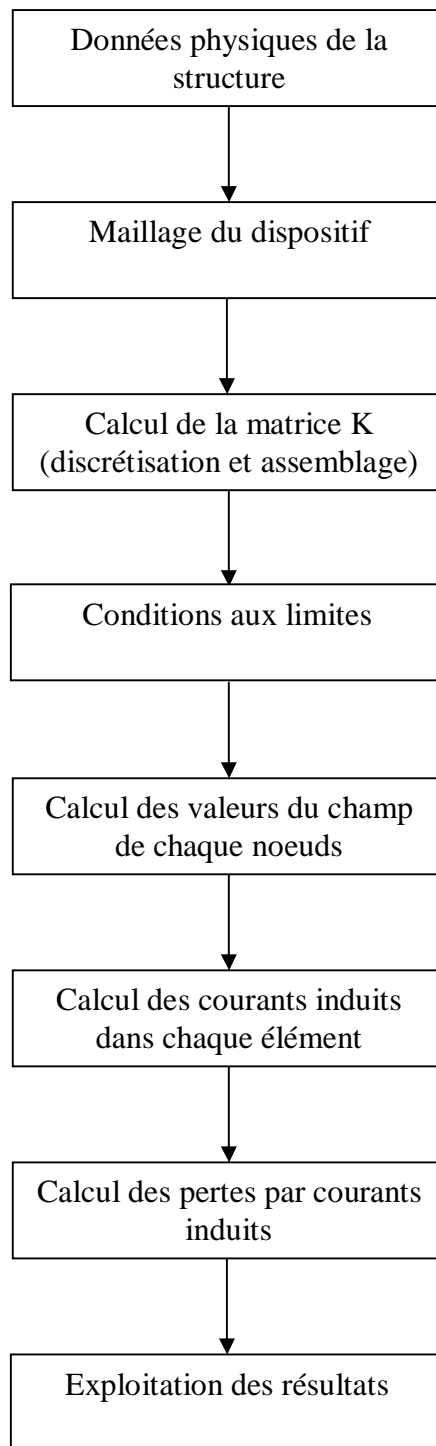
$\sigma$  conductivité électrique.

$J$  densité de courants de Foucault (courants induits).

$S_{\text{el}}$  surface d'un élément.

#### IV.5 Architecture du code de calcul éléments finis 2D

Pour réaliser le calcul des pertes par courants de Foucault, nous avons élaboré un code de calcul éléments finis 2D sous un environnement MATLAB dont la structure est montrée dans la figure 4.4.



**Figure 4.4 :** Architecture du code de calcul

## IV.6 Pertes par courants de Foucault dans la tôle

Pour calculer les pertes dans la tôle, il faut passer de l'échelle élémentaire à l'échelle complète représentant la géométrie de la tôle, pour cela :

On multiplie l'équation IV.5 par le volume de l'élément, nous aurions alors:

$$P_{el} = \frac{1}{\sigma} J^2 S_{el} l \quad [W]$$

Où  $l$  est la largeur de la tôle.

Puis, on fait la somme de toutes les pertes élémentaires :

$$P_{tot} = \sum_1^{ne} P_{el} \quad [W] \quad (IV.4)$$

Et pour avoir ces pertes en Watts/Kg, on divise sur le volume de la tôle et sur la masse volumique.

Au final, l'expression des pertes dans la tôle est la suivante :

$$P_{tot} = \frac{1}{V_T \times m_v} \sum_1^{ne} P_{el} \quad [W/Kg] \quad (IV.5)$$

Tel que :

$V_T$  volume de la tôle.

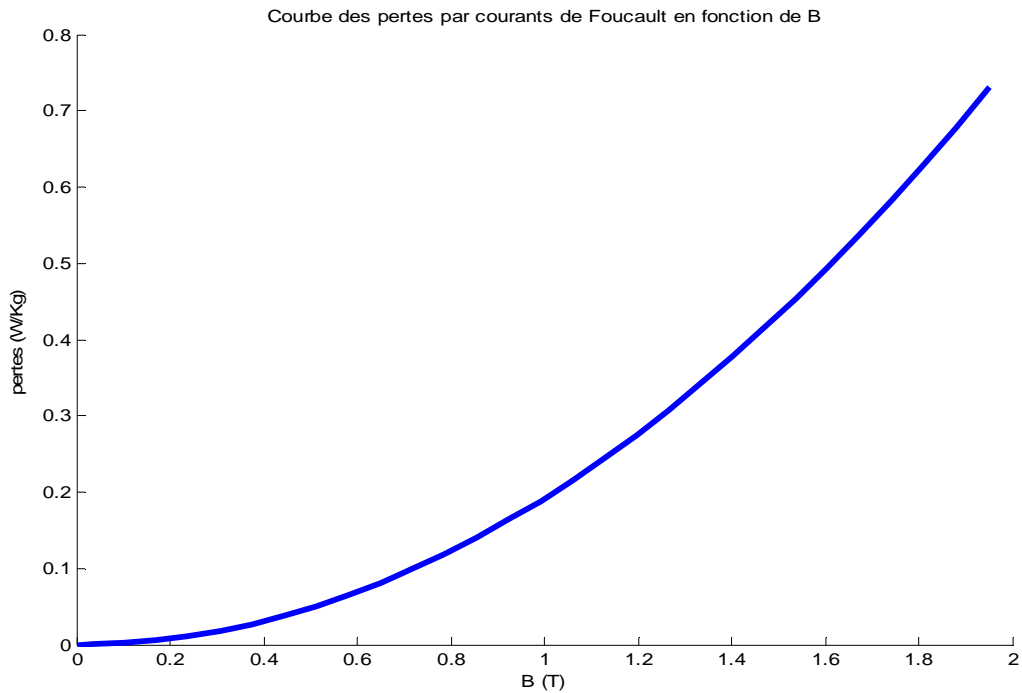
$m_v$  la masse volumique de la tôle.

### IV.6.1 Calcul linéaire

Dans ce cas, on suppose que le matériau magnétique a un comportement linéaire et caractérisé par une perméabilité magnétique relative constante calculée dans la partie linéaire de la courbe de première aimantation, dans ces conditions la perméabilité relative vaut  $\mu_r = 37500$

#### IV.6.1.1 Courbe des pertes en fonction de l'induction magnétique

En faisant varier la valeur de l'induction pour une fréquence de 50 Hz, nous avons obtenu les variations des pertes par courants de Foucault en W/Kg en fonction de l'induction magnétique fig.4.5.

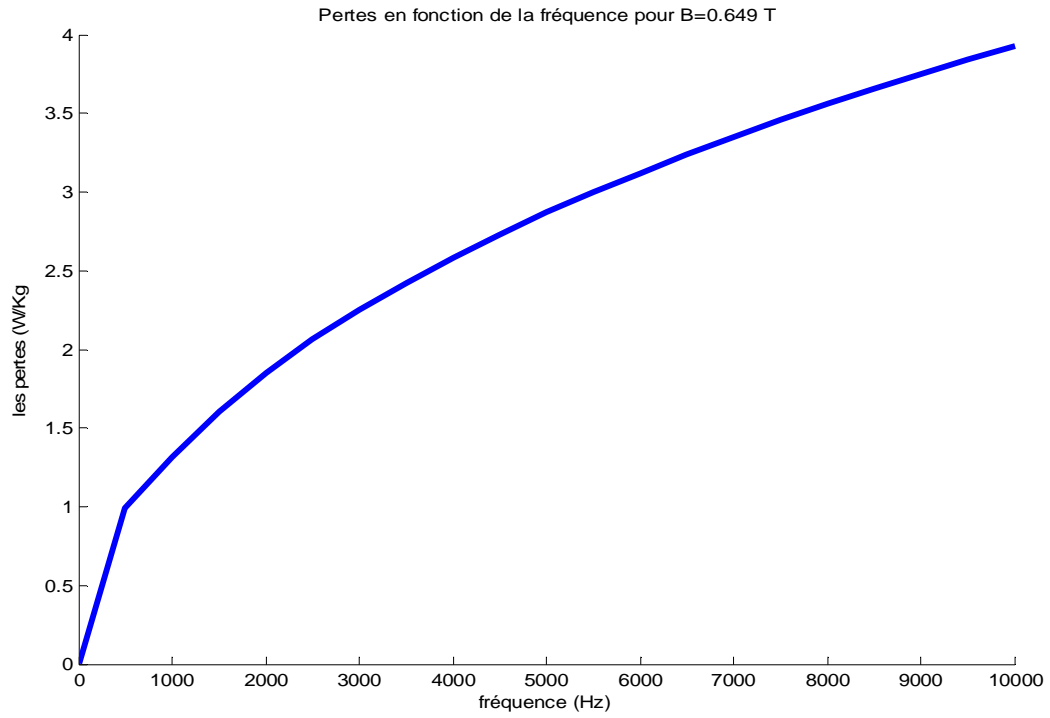


**Figure 4.5 :** Variations en régime linéaire des pertes en fonction de l'induction magnétique

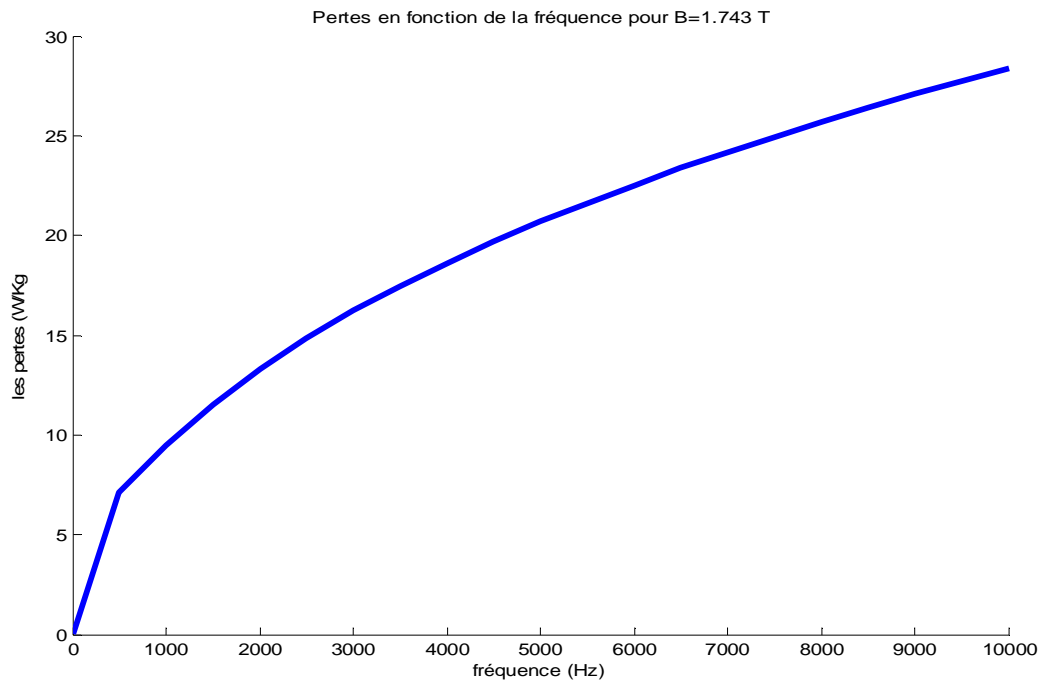
Sur la figure 4.5, nous remarquons que les pertes par courants de Foucault augmentent avec l'induction magnétique.

#### IV.6.1.2 Courbes des pertes en fonction de la fréquence

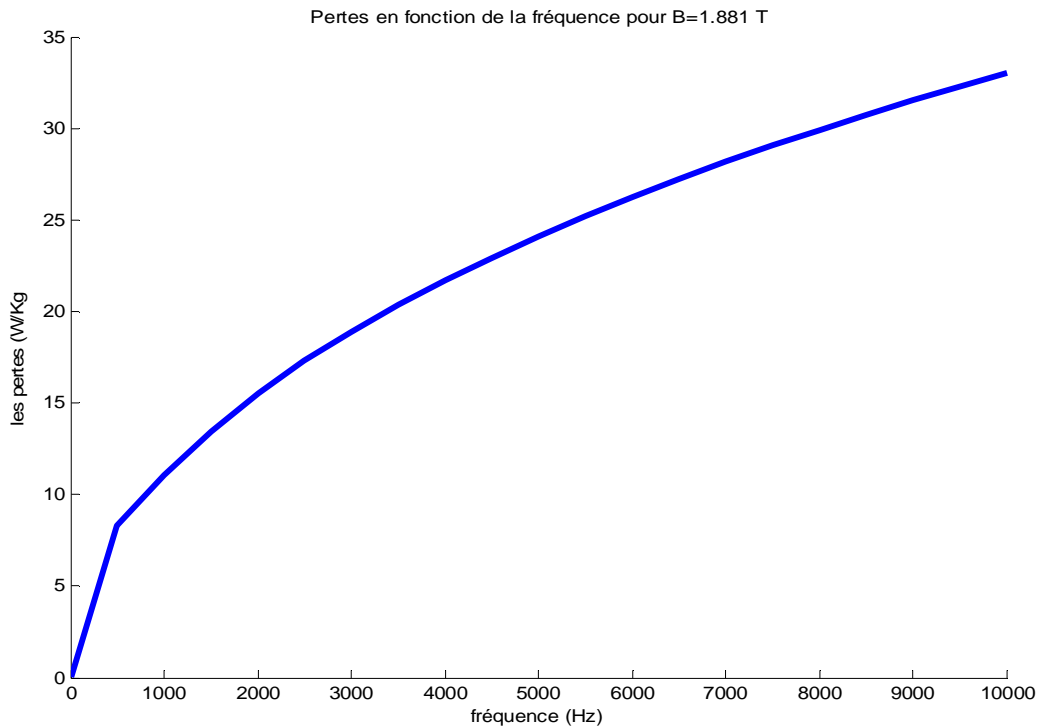
Pour trois valeurs de l'induction magnétique prises dans différentes parties de la courbe de première aimantation ; la partie linéaire, coude de saturation, et partie de saturation, nous avons calculé les pertes en fonction de la fréquence, les résultats obtenus sont illustrés dans les figures fig.4.6, fig. 4.7 et fig. 4.8.



**Figure 4.6 :** Variations des pertes en fonction de la fréquence pour B =0.649 T en régime linéaire.



**Figure 4.7 :** Variations des pertes en fonction de la fréquence pour B =1.743 T en régime linéaire.



**Figure 4.8 :** Variations des pertes en fonction de la fréquence pour B =1.881 T en régime linéaire.

Les figures (4.6) et (4.7) et (4.8) montrent que lorsqu'on augmente la fréquence, les pertes par courants de Foucault augmentent, à cause de l'épaisseur de peau qui devient plus faible, la section de la tôle parcourue par les courants induits diminue, donc la résistance augmente, ce qui conduit à des pertes plus importantes.

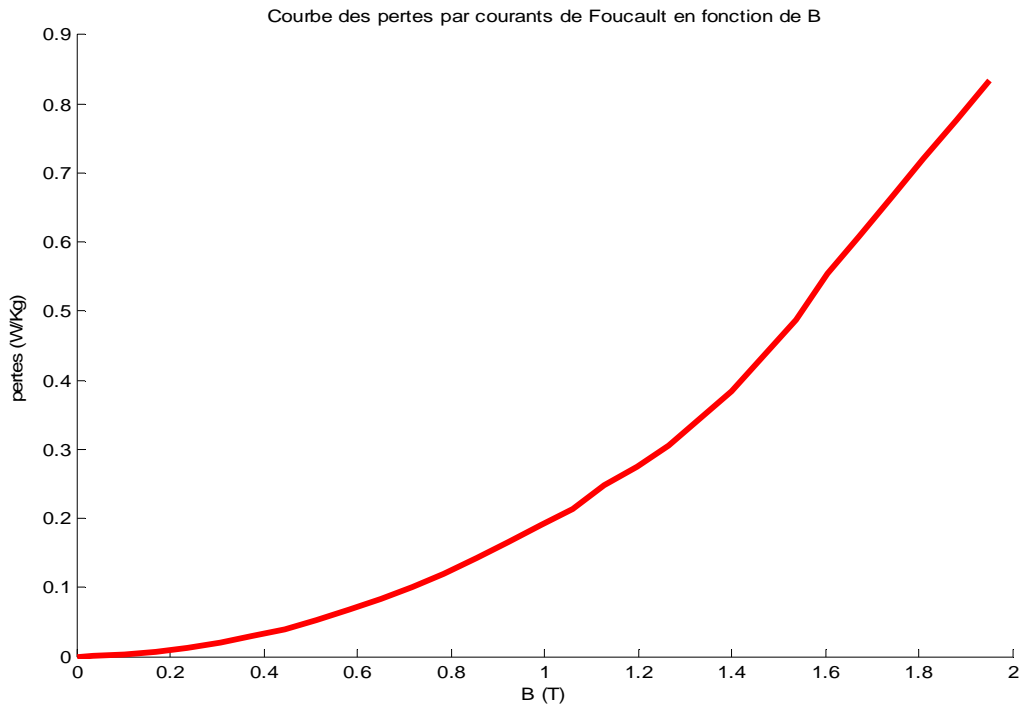
Pour une fréquence de  $10^5$  Hz, l'épaisseur de peau vaut 0.54 mètre, elle est supérieure à 0.003 mètre qui correspond à l'épaisseur de la tôle, donc toute la tôle sera parcourue par les courants induits. Par contre, pour une fréquence de 5000 Hz, l'épaisseur de peau est égale à  $2.42 \cdot 10^{-5}$  mètre, ce qui conduit à un effet de peau très important.

#### IV.6.2 Calcul non linéaire

La variation de champ magnétique conduit à une variation de la perméabilité magnétique, donc, pour calculer les pertes, on calcule la perméabilité correspondante à chaque valeur du champ magnétique d'excitation, ce calcul est assuré par l'introduction de la courbe de première aimantation dans le code de calcul.

### IV.6.2.1 Courbe des pertes en fonction de l'induction magnétique

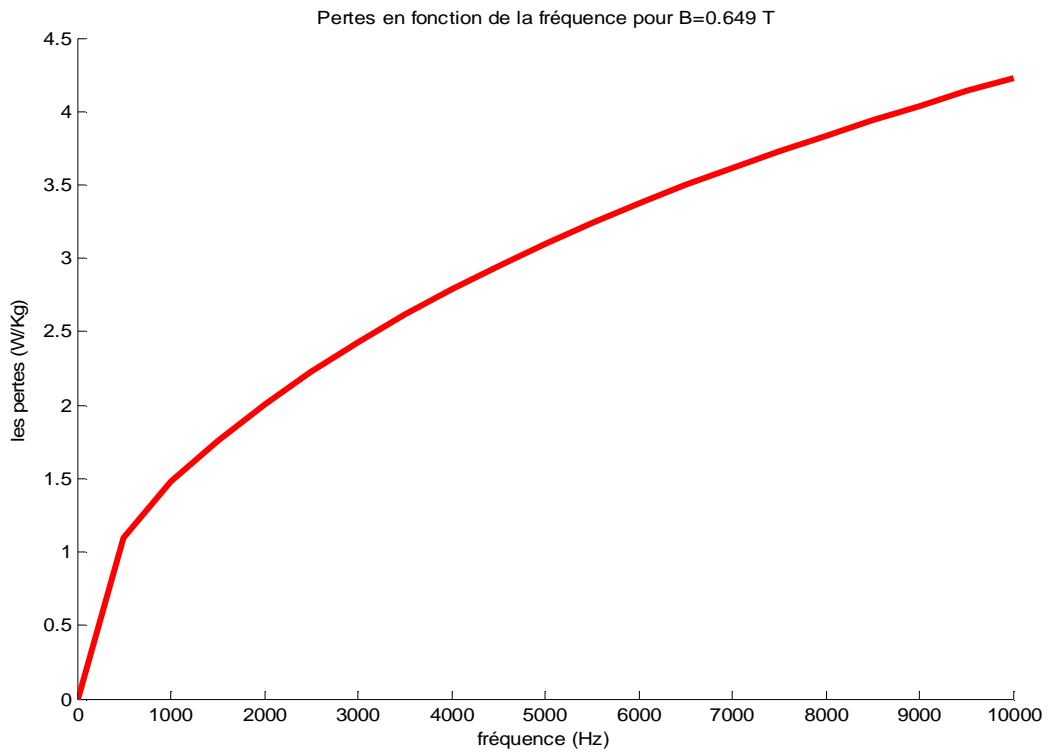
Les variations des pertes par courants de Foucault obtenues en variant l'induction magnétique sont illustrées dans la figure 4.9.



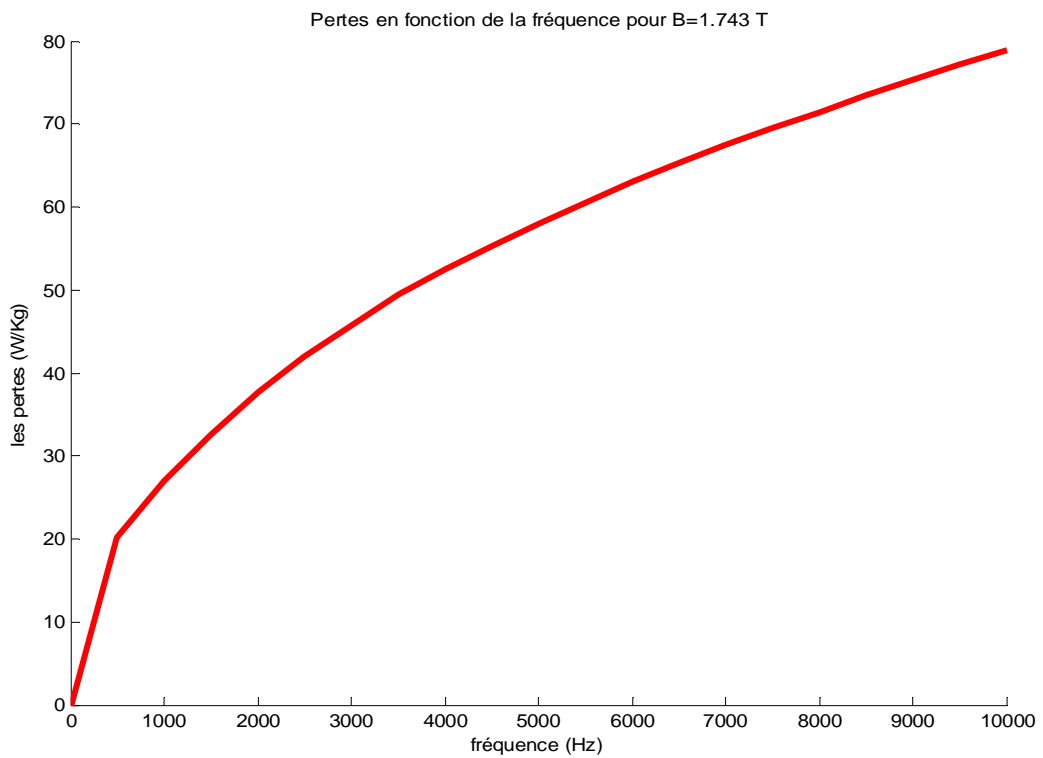
**Figure 4.9 :** Variations en régime non linéaire des pertes en fonction de l'induction magnétique.

### IV.6.2.2 Courbe des pertes en fonction de la fréquence

Pour trois points pris respectivement dans la partie linéaire, coude de saturation et saturation de la courbe de première aimantation, nous avons tracé les variations des pertes en fonction de la fréquence dans les figures 4.10, 4.11, 4.12.

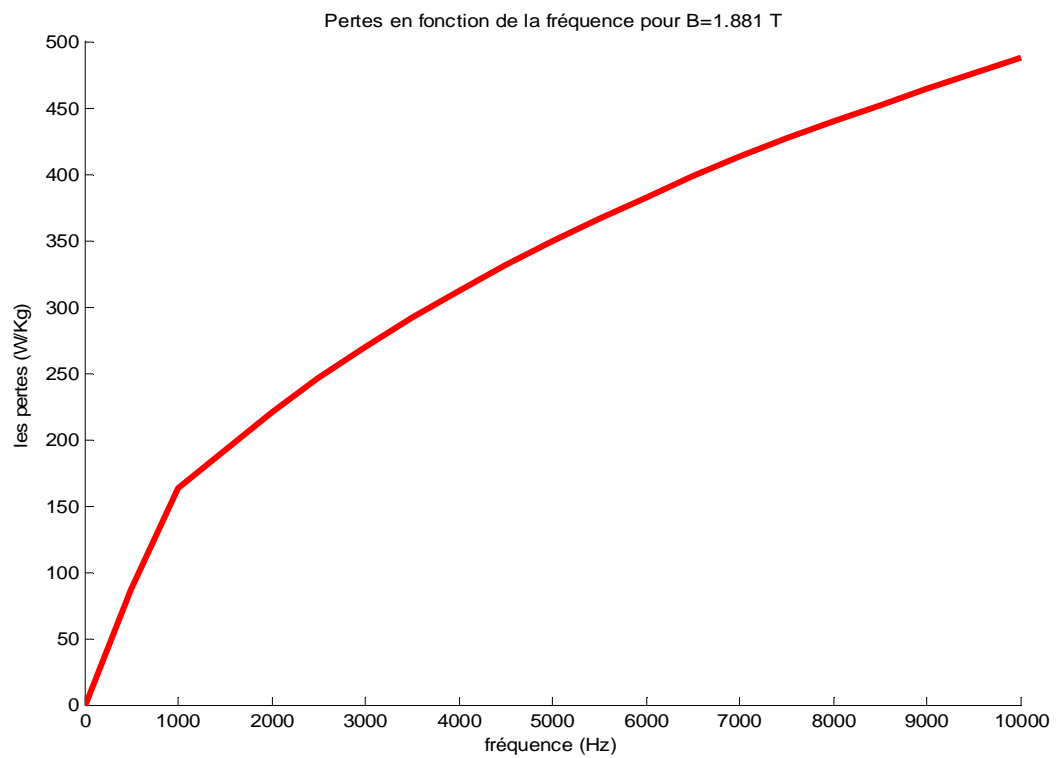


**Figure 4.10 :** Variations des pertes en fonction de la fréquence pour B =0.649 T en régime non linéaire.



**Figure 4.11 :** Variations des pertes en fonction de la fréquence pour B =1.743 T en régime non linéaire.





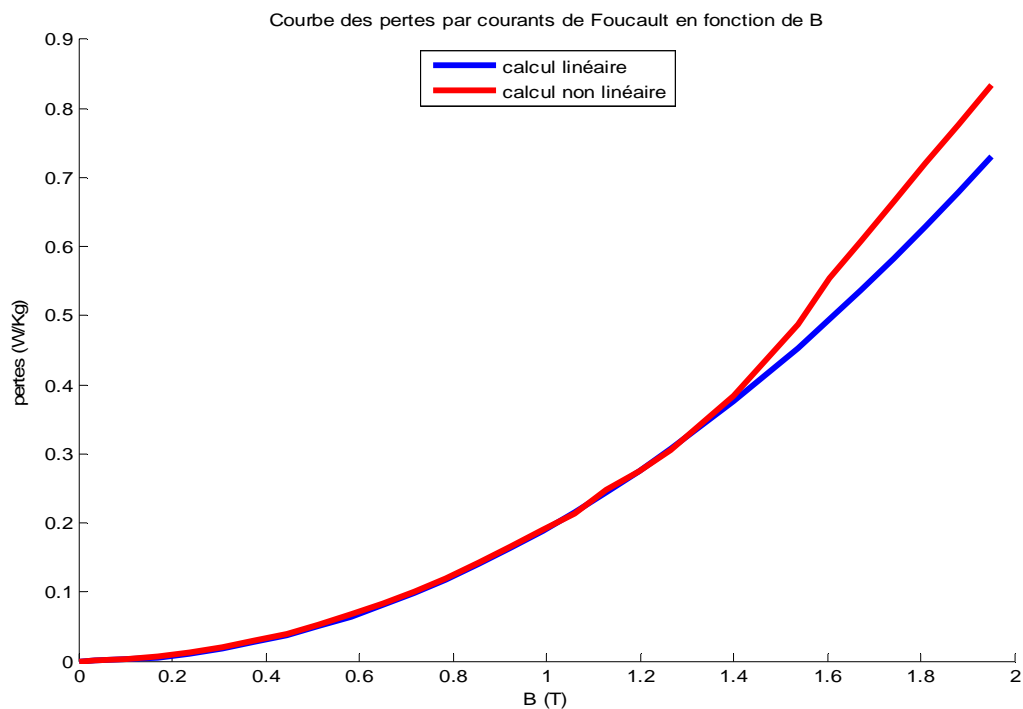
**Figure 4.12 :** Variations des pertes en fonction de la fréquence pour  $B = 1.881$  T en régime non linéaire.

On remarque que les pertes par courants de Foucault augmentent avec la variation de l'induction et de la fréquence.

## IV.7 Comparaison entre les résultats du calcul linéaire et ceux du calcul non linéaire

### IV.7.1 Variation des pertes en fonction de l'induction magnétique

Afin de faire une comparaison entre les résultats du calcul linéaire et ceux du calcul non linéaire, nous avons regroupé les courbes obtenues précédemment pour une variation de l'induction magnétique. Elles sont représentées dans la figure 4.13.

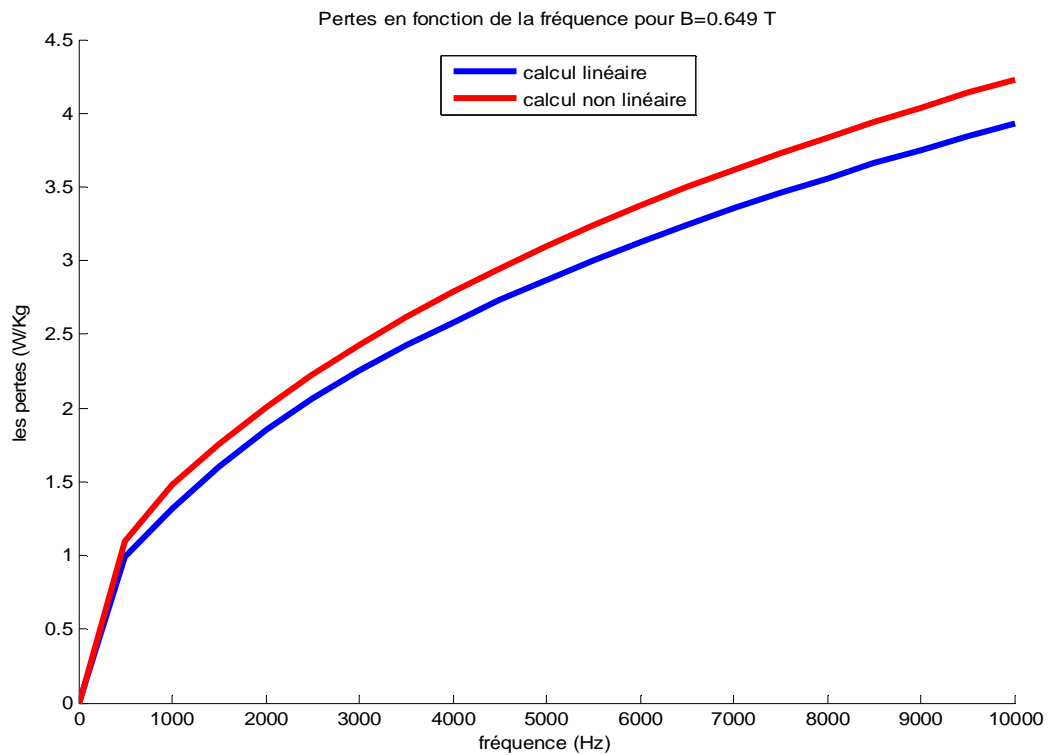


**Figure 4.13 :** Variations des pertes en fonction de l'induction

Sur la figure 4.13, nous remarquons que pour les fréquences inférieures à 1.4 Tesla, les pertes par courants de Foucault obtenues dans le calcul linéaire et le calcul non linéaire sont égales, car, dans cette partie, la tôle ferromagnétique a un comportement linéaire. Par contre, pour les valeurs d'induction supérieures à 1.4 T, on remarque que les valeurs des pertes du calcul non linéaire sont supérieures aux celles du calcul linéaire à cause des variations du champ magnétique, elles sont très réduites dans le calcul linéaire, la valeur du champ magnétique qui donne l'induction 1.811 Tesla vaut 38.43 Ampère/mètre, alors que dans le calcul non linéaire, la valeur du champ est égale à 98 A/m, donc les pertes par courants de Foucault vont être plus grandes pour la valeur 98 A/m. Cette différence de variation du champ magnétique est due à la saturation prise en compte dans le calcul non linéaire.

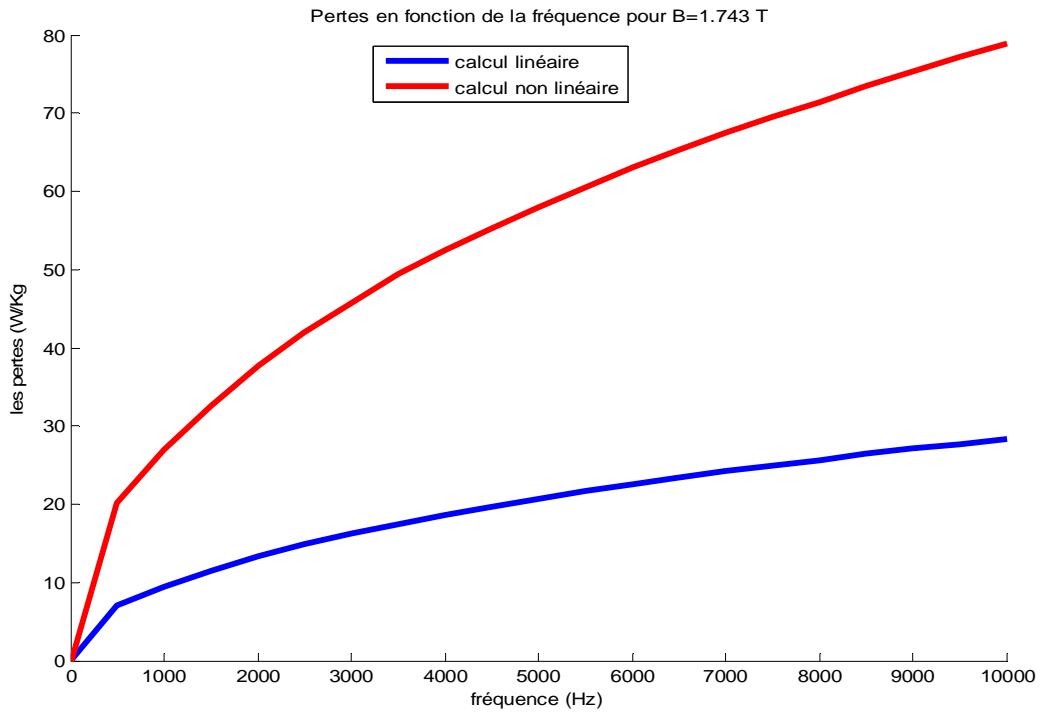
### IV.7.2 Variation des pertes en fonction de la fréquence

Les courbes suivantes sont les courbes obtenues dans les calculs précédents. Pour chaque valeur de l'induction magnétique, nous avons représenté la courbe des variations des pertes par courants de Foucault du calcul linéaire et non linéaire dans une seule figure.

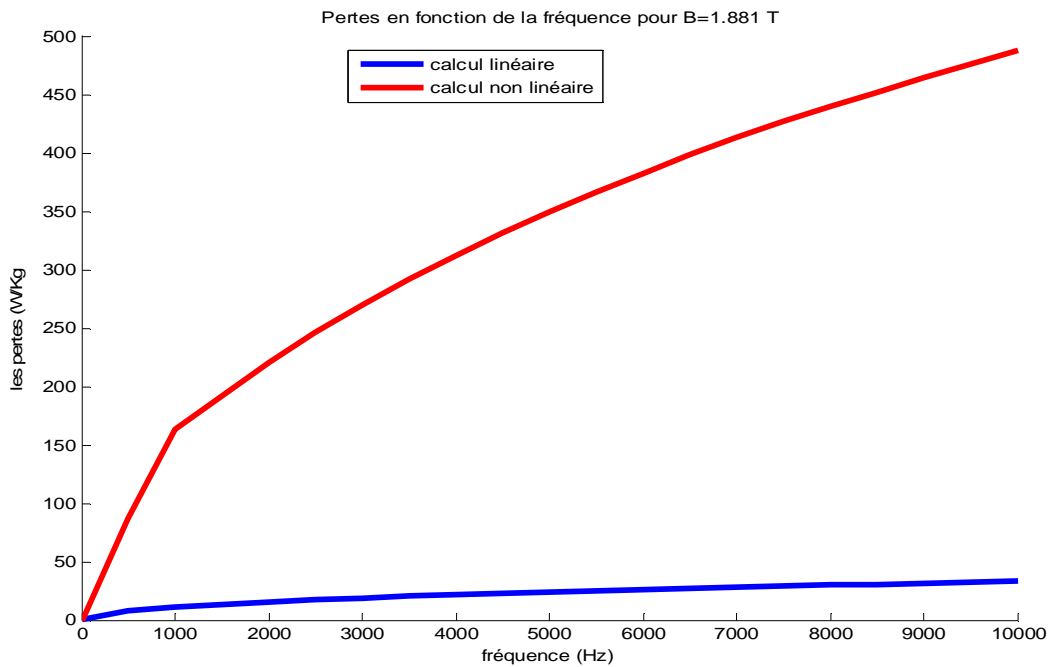


**Figure 4.14 :** Variations des pertes en fonction de la fréquence pour B =0.649 T.

Pour les fréquences faibles, on remarque que les pertes sont presque identiques à cause de l'épaisseur de peau qui est très grande, la section de tôle est complètement parcourue par les courants induits, l'effet de ces courants est prépondérant. Par contre, lorsque la fréquence est importante, on remarque un écart entre les deux courbes.



**Figure 4.15 :** Variations des pertes en fonction de la fréquence pour B =1.743 T.



**Figure 4.16 :** Variations des pertes en fonction de la fréquence pour B =1.881 T.

Nous remarquons que les pertes en fonction de la fréquence en non linéaire sont plus grandes comparativement au cas linéaire, ceci est dû essentiellement à la non linéarité considérée pour le premier cas.

## **Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenter la procédure que nous avons suivi afin de calculer les pertes par courants de Foucault dans le dispositif étudié, par la suite, nous avons fait un aperçu sur l'influence de l'induction magnétique et de la fréquence sur se genre de pertes.

Le calcul non linéaire améliore les résultats vu la forme de la courbe des pertes en fonction de l'induction, ceci est dû à la prise en compte de la saturation et des variations de la perméabilité magnétique qui correspond à l'aspect physique.

La modélisation numérique permet d'étudier la plupart des phénomènes électromagnétiques qui se produisent dans les dispositifs électriques, cette modélisation est menée par l'emploi des équations de MAXWELL et les méthodes numériques. Dans notre travail, nous nous sommes intéressé à la méthode des éléments finis.

Des généralités sur les équations de MAXWELL et la méthode des éléments finis ont été abordées avant de les mettre en œuvre.

L'étude que nous avons menée consistait à calculer les pertes par courants de Foucault dans une tôle ferromagnétique utilisée dans le circuit magnétique d'un transformateur soumise à un champ magnétique variable dans le temps, pour cela, nous avons établi la formulation magnétodynamique en terme du champ magnétique, puis nous avons résolu cette équation par la méthode des éléments finis.

Afin de calculer les pertes par courants de Foucault dans la tôle considérée, nous avons élaboré des codes sous environnement MATLAB, ces codes nous ont permis de réaliser un calcul linéaire et un calcul non linéaire.

Après cette étude, nous avons constaté l'influence de l'induction magnétique et de la fréquence sur les pertes par courants de Foucault, ces derniers augmentent avec l'augmentation de l'induction magnétique ou de la fréquence.

Un calcul performant et fiable des pertes par courants de Foucault est nécessaire pour une bonne utilisation de la tôle ferromagnétique. Le calcul non linéaire conduit à des résultats plus fiables par rapport au calcul linéaire, ceci est dû au comportement non linéaire de la tôle ferromagnétique.

Comme perspective par ce travail :

- Etude d'un ensemble de tôles isolées entre elles correspondantes à une structure d'un transformateur en cas linéaire et non linéaire
- Validation des résultats par un modèle expérimental.

[1] **Pierre Brissonneau** : «Magnétisme et matériaux, pour l'électrotechnique», Edition Hermès, Paris 1979.

[2] **M. Imache** : « Cour de 4<sup>ème</sup> année Ingénieur en électrotechnique », Module TEC 427, Université de Tizi-Ouzou-2007/2008.

[3] **J. E. Thomson**: «The magnetic properties of materials », Edition Newnes Books, New York, 1968.

[4] **N. Kissa**: « Modélisation de l'hystérésis magnétique en vue de son intégration dans un code de calcul de champ magnétique » ; Mémoire de Magister, Université de Batna 2006.

[5] **J-LUCAS**. Encyclopédie « Induction, conduction électrique dans l'industrie », Edition DOPEE85.

[6] **P.Robert** : «Traité d'électricité – Matériaux de l'électrotechnique » ; Edition DUNOD, Paris, 1979.

[7] **M.Belkadi** : «Contribution à l'homogénéisation des propriétés Electromagnétiques et thermiques des poudres de fer», Stage de Master recherche systèmes Electronique et Génie Electrique », Ecole polytechnique de l'université de Nantes, Année Universitaire 2005/2006.

[8] **M.AZIRI et S.TAGZIRT** : «Etude des pertes fer et analyse harmonique du champ et de l'induction magnétique dans les tôles FeSi», Mémoire d'ingénieur d'état, Université de Tizi-Ouzou-2006.

[9] **M.Ait Ramdane, A.Allala** : « Modélisation d'un contacteur électromagnétique en régime transitoire par la méthode des circuits couplés », Mémoire d'ingénieur d'état, Université de Tizi-Ouzou, 2006 / 2007.

[10] **Jean-Louis** : «Transport et distribution de l'énergie électrique», Manuel de travaux pratiques, Université de Liège faculté des sciences appliquées, Année académique 1999/2000.

[11] **S.Bensaid** : «Utilisation de la méthode du problème inverse pour l'identification des propriétés physiques des matériaux composites de type résine / carbone » ; Ecole polytechnique de l'université de Nantes, Année Universitaire 2001/2002.

[12] **A.BONNET**:« Transformateur » ; Cours tiré du site sitelec.free.fr, 2002.

[13] **M.Abdllah, D.Moussaoui** : «Magnétisme» ; Formation continue, Ecole militaire polytechnique 2001.

[14] **JEAN-CLAUD SABONNADIÈRE, JEAN-LOUIS COULOMB** :«Calcul des champs électromagnétiques » ; Technique de l'ingénieur (D 3 020).

[15] **P.BARUCH, M.HULIN, J.-F.PETROFF** :« Electricité, Magnétisme, Cours » ; Hermann, paris, 1972.

[16] **P.LORRAIN, D.R.CORSON** :« Champs et ondes électromagnétiques » ; ARMAND COLIN, Paris, 1979.

[17] **Gérard DEBEAUMARCHE** : « Introduction aux équations aux dérivées partielles linéaires », Technique de l'ingénieur, AF 162.

[18] **A.Diche**: «développement de modèles de transformation pour l'étude des capteurs à courant de Foucault » ; Mémoire de Magister, Université de Tizi-Ouzou, 2003.

[19] **F.Brihmat** : «Effets d'une alimentation non sinusoïdale sur les performances d'un moteur linéaire a induction » ; Mémoire d'ingénieur d'état, Université de Tizi-Ouzou-2007.



[20] **H. Mohellebi** : «cours de 5<sup>ème</sup> année Ingénieur en Electrotechnique» ; Module TEC 431, Université de Tizi-Ouzou- 2007/2008.

[21] **M. Azzouz, S.Bouamara, R. Bedrane**: «Etude des performances dynamiques d'un actionneur électromagnétique linéaire » ; Mémoire d'ingénieur d'état, Université de Tizi-Ouzou-2007.