

élat4

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

**MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE
EN VUE D'OBTENTION D'UN DIPLÔME DE MASTER
ACADÉMIQUE**

SPECIALITE : RECHERCHE OPERATIONNELLE
OPTION : aide à la décision

Présenté par:

ALIOUECHE Keltouma et RAMDANI Hayet

Sujet:

**Étude d'un problème de contrôle en temps
optimal avec interdépendance sur les
contraintes d'entrée**

Devant le jury d'examen composé de:

M. HAMAZ Abdelghani;	Maître de Conférences;	U.M.M.T.O;	Président
M. MERAKEB A.Kader;	Maître de Conférences;	U.M.M.T.O;	Rapporteur
Mme. ACHEMINE Farida;	Maître de Conférences;	U.M.M.T.O;	Examinatrice
Mme. LOUADJ Kahina;	Maître de Conférences;	U.M.M.T.O;	Examinatrice

Soutenu le: 28/10/2012

Remerciements

Nous remercions d'abord Dieu le tout puissant d'avoir guidé nos pas vers les portes du savoir tout en illuminant notre chemin, et nous avoir donné suffisamment de courage et de persévérance pour mener notre travail à terme.

Nous tenons à exprimer notre grande et sincère gratitude à notre promoteur Mr A.Kader MERAKEB, qui nous a fourni l'aide précieuse et le soutien nécessaire pour mener à bien notre étude.

Nous remercions également les membres de jury pour avoir accepté de juger notre travail.

Nos meilleurs remerciements vont à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation à l'université et en particulier les enseignants du département de Recherche Opérationnelle. Grâce à eux, nous avons acquis de précieux outils et concepts qui nous ont fortement aidés à résoudre les problèmes auxquels nous avons été confrontés lors de notre projet.

Nous exprimons également nos vifs remerciements à nos chères familles pour le sacrifice qu'elles ont consenti et le soutien inconditionnel qu'elles nous ont apporté tout au long de notre étude.

Enfin, nous remercions toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de cette étude, spécialement à nos camarades du département de mathématiques, et en particulier nos amis de la promotion qui étaient toujours là pour nous encourager et nous montrer le bon chemin. Nous les prions de trouver ici le témoignage de nos plus vives gratitude.

Table des matières

1	Rappel sur les équations différentielles	5
1.1	Introduction	5
1.2	Définitions et notions de bases	5
1.3	Type d'équation différentielle	6
1.3.1	Équations différentielles linéaires du premier ordre	6
1.3.2	Équations différentielle à variables séparées	8
1.3.3	Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	8
1.4	Système d'équations différentielles linéaire	13
1.5	Système d'équations différentielles du 1er ordre	14
1.6	Méthodes numériques de résolution des équations différentielles ordinaires	15
1.6.1	Problème de Cauchy	15
1.6.2	La méthode d'Euler	16
1.6.3	Estimation de l'erreur de consistance	17
1.6.4	Méthode de Runge-Kutta	18
1.7	Conclusion	20
2	Théorie du contrôle optimal et des systèmes de contrôle	21
2.1	Introduction	21
2.2	Le but de la commande	21
2.3	Classe des commandes admissibles	22
2.3.1	Commande bornée	22
2.3.2	Commande Bang-Bang	22
2.4	Fonction objectif	22
2.5	Formulation générale d'un problème de contrôle optimal	23

2.6	Système de contrôle linéaire	25
2.7	Contrôlabilité	26
2.7.1	Contrôlabilité des systèmes linéaires	26
2.7.2	Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes	26
2.8	Problème en temps minimal pour les systèmes linéaires	28
2.8.1	Existence de trajectoires en temps-optimal	28
2.8.2	Existence de la commande optimale	28
2.8.3	Unicité de la commande optimale	28
2.8.4	Condition nécessaire et suffisante de singularité	29
2.9	Principe du maximum de Pontryagin	29
2.10	Conclusion	31
3	Problème linéaire de contrôle en temps optimal sur une classe de commandes interdépendantes	32
3.1	Introduction	32
3.2	Position de problème	32
3.3	Formulation du problème	34
3.3.1	problème 3.1.	35
3.3.2	problème 3.2.	35
3.4	Contrôle dynamique à entrée unique	35
3.4.1	Problème singulier	37
3.4.2	Normalité et unicité du problème 3.1	37
3.4.3	Existence de contrôle dynamique mono-entrée	39
3.5	Réduction d'entrée	40
3.6	Exemples	42
3.7	Conclusion	47
	Conclusion	48
	Bibliographie	49

Introduction

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard... . Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie...

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, etc. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes.

Une fois le problème de contrôlabilité résolu, on peut de plus vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère. En particulier, si on choisit un critère qui minimise le temps final, on parlera alors d'un problème de contrôle en temps optimal.

L'objectif tracé dans ce travail est l'étude d'un problème de contrôle en temps optimal avec une classe de commandes à contraintes interdépendantes. En relation avec ce type de contraintes, un nouveau type de contrôle optimal appelé contrôle dynamique mono-entrée DSIC (dynamic single-input control) est introduit. Ce dernier indique qu'en tout intervalle de temps non trivial, un seul canal d'entrée fonctionne à sa valeur extrême alors que tous les autres canaux ne sont pas utilisés. Les canaux de connexion peuvent être effectués par saut de l'un à l'autre au cours de la totalité de la période de temps. Évidemment, si un canal d'entrée n'est jamais

utilisé dans tout le processus de contrôle, il peut être éliminé sans affecter le temps optimal. On parlera alors de réduction d'entrée.

Le présent travail est répartie en trois chapitres : le premier chapitre est consacré aux notions sur les équations différentielles qui sont la base fondamentale du contrôle optimal. Dans le second chapitre on s'intéresse à la théorie du contrôle optimal, et particulièrement au problème de contrôle en temps optimal où la notion de contrôlabilité est intuitivement pertinente. Pour la résolution de ce type de problème, on parlera du principe du maximum de Pontryaguin (PMP). Le dernier chapitre concerne une étude sur un problème de contrôle en temps optimal avec présence de contraintes interdépendantes sur les entrées du système. Ce travail se termine par une conclusion.

Chapitre 1

Rappel sur les équations différentielles

1.1 Introduction

Les équations différentielles représentent un domaine extrêmement puissant de l'analyse mathématique. On les rencontre dans absolument tous les domaines, que ce soit en mécanique, en électronique, en économie... etc.

Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. Dans ce chapitre, on commence par donner quelques exemples d'équations différentielles issues de différentes disciplines.

1.2 Définitions et notions de bases

Une équation différentielle est une relation entre une variable réelle (par exemple t), une fonction qui dépend de cette variable (par exemple y) et un certain nombre de ses dérivées successives.

La forme générale d'une équation différentielle d'ordre n s'écrit:

$$R\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, \frac{d^ny}{dt^n}\right) = 0 \quad (1.1)$$

ou encore

$$R(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

où y est une fonction qui dépend de t . R est une fonction de $n+2$ variables $t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}$.

Nous nous intéresserons aux fonctions y à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Résoudre une équation différentielle revient à trouver une expression générale pour toutes ses solutions.

En fait, l'équation de forme générale (1.1) ci-dessus est peu pratique. On préférera travailler avec des équations plus particulières dites de type explicite, c'est à dire quand on peut exprimer la dérivée la plus forte en fonction de t et des dérivées d'ordre inférieures

$$y^{(n)} = G(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.2)$$

où G est une fonction continue.

1.3 Type d'équation différentielle

1.3.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre est une expression qui décrit une relation entre une fonction à une variable et sa dérivée première :

$$\dot{y} + a(t)y = b(t) \quad (1.3)$$

avec a et b sont des fonctions de t définies et continues sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} .

Solution générale de l'équation sans second membre

Nous cherchons la solution générale de l'équation

$$\dot{y} + a(t)y = 0$$

où a est une fonction réelle continue sur l'intervalle ouvert I de \mathbb{R} .

Si y ne s'annule pas sur I , on peut écrire $\frac{\dot{y}}{y} = -a(t)$, et on reconnaît à gauche la dérivée de $\ln(y)$. si $A(t) = \int a(t)dt$ est la primitive de $a(t)$ sur I , on déduit donc que $\ln(y) = -A(t) + c$.

Alors

$$y(t) = Ke^{-A(t)} \quad (1.4)$$

avec c et K sont des constantes réelles.

Remarque 1.1. En particulier, si y s'annule en un point, alors y est identiquement nulle.

Solution de l'équation complète

On cherche la solution générale de l'équation $\dot{y} + a(t)y = b(t)$, connaissant la solution générale de l'équation sans second membre $\dot{y} + a(t)y = 0$, sous la forme $y(t) = Kz(t)$, avec $z(t) = e^{-A(t)}$ et $A(t)$ primitive de $a(t)$.

On dispose de la méthode de variation de la constante. Elle consiste à poser $y(t) = u(t)z(t)$, et à trouver u pour que y soit solution de l'équation complète.

On a $\dot{y} + a(t)y = \dot{u}z + uz + a(t)uz = \dot{u}z$. Donc y est solution de l'équation complète si et seulement si $\dot{u} = \frac{b(t)}{z(t)}$.

Si $B(t)$ est une primitive de $\frac{b(t)}{z(t)} = b(t)e^{A(t)}$, alors $e^{-A(t)}B(t)$ est une solution particulière de l'équation complète.

Théorème 1.1. *Soient $a(t)$ et $b(t)$ deux fonctions réelles continues sur l'intervalle ouvert I , avec $A(t)$ la primitive de $a(t)$ et $B(t)$ la primitive de $b(t)e^{A(t)}$.*

Alors la solution générale de l'équation différentielle $\dot{y} + a(t)y = b(t)$ est:

$$y(t) = e^{-A(t)}(B(t) + K)$$

où K est une constante réelle.

On a donc ramené le problème de résolution de l'équation différentielle au calcul de deux primitives.

Solution vérifiant une condition initiale

Étant donnée une condition initiale pour l'équation (1.3) sur l'intervalle ouvert I , soit $t_0 \in I$ et un réel y_0 , telle que $y(t_0) = y_0$. On a vu que la solution générale s'écrit

$$y = e^{-A(t)}(B(t) + K)$$

où $A(t)$ est une primitive de $a(t)$, $B(t)$ une primitive de $e^{A(t)}b(t)$, et K une constante réelle. La condition initiale permet de déterminer cette constante

$$y_0 = e^{-A(t_0)}(B(t_0) + K)$$

donc

$$K = e^{A(t_0)}y_0 - B(t_0)$$

ce qui montre l'existence et l'unicité de la solution vérifiant la condition initiale.

Remarque 1.2. Il existe une et une seule solution de l'équation $\dot{y} + a(t)y = b(t)$ sur I satisfaisant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Cas particulier: si a et b sont des constantes non nulles, alors la solution générale de l'équation $\dot{y} + ay = b$ est :

$$y(t) = \frac{b}{a} + Ke^{at}$$

1.3.2 Équations différentielle à variables séparées

On appelle équation différentielle à *variables séparées* une équation de la forme

$$\dot{y}.g(y) = h(t)$$

où g est une fonction réelle continue dans un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et h une fonction réelle et continue sur un intervalle ouvert J .

Si G et H sont des primitives respectives de g et h , la solution d'une telle équation est donnée par :

$$G(y) = H(x) + C$$

où C est une constante réelle. Considérons par exemple

$$\dot{y} = e^{t+y}.$$

On peut séparer les termes en y des termes en t .

$$\dot{y}e^{-y} = e^t \Leftrightarrow -e^{-y} = e^t + A \Leftrightarrow y = -\ln(A - e^t).$$

1.3.3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On cherche ici à résoudre l'équation

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = f(t) \tag{1.5}$$

où a , b et c sont des constantes réelles, avec $a \neq 0$, et f une fonction définie et continue sur un intervalle I de \mathbb{R} .

On veut trouver les fonctions y , deux fois continûment dérivables de I dans \mathbb{R} , qui vérifient cette équation. C'est une équation différentielle du second ordre car elle fait intervenir la dérivée seconde de y .

C'est une équation linéaire, c'est-à-dire que, si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation $u(y) = f(t)$, alors $u(y_1 - y_2) = 0$.

On est ainsi amené à résoudre l'équation sans second membre $u(y) = 0$.

Supposons qu'on a déterminé l'ensemble S des solutions de l'équation sans second membre, et qu'on connaisse une solution particulière y_1 de l'équation complète. Alors y est solution de l'équation complète si et seulement si on a $y = y_1 + z$ où $z \in S$ est solution de l'équation sans second membre.

Remarque 1.3. La solution générale de l'équation complète est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation complète.

L'équation sans second membre

On s'intéresse ici à l'équation sans second membre $f(t)$

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0.$$

On recherche une solution de la forme $y = e^{rt}$, où r est une constante. En substituant dans l'équation, on trouve

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0$$

Le polynôme $P(r) = ar^2 + br + c$ s'appelle polynôme caractéristique de l'équation différentielle et Δ son discriminant.

Trois cas sont à distinguer.

1. Le polynôme caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 ($\Delta > 0$).

La solution générale de l'équation sans second membre dans \mathbb{R} est:

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

avec c_1 et c_2 sont deux constantes réelles.

2. Le polynôme caractéristique a deux racines complexes conjuguées distinctes λ et $\bar{\lambda}$ ($\Delta < 0$) .

$\lambda = a + i\beta$ et $\bar{\lambda} = a - i\beta$.

Alors $e^{\lambda t}$ et $e^{\bar{\lambda}t}$ sont des fonctions à valeurs complexes de t , qui sont solutions de l'équation différentielle sans second membre. On a

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) \\ e^{\bar{\lambda}t} &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)) \end{aligned}$$

Nous sommes intéressés par les solutions réelles. La partie réelle $y_1 = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ et la partie imaginaire $y_2 = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ sont des solutions réelles de l'équation, et la solution générale dans \mathbb{R} de l'équation sans second membre est

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)) \quad (1.6)$$

avec c_1 et c_2 sont des constantes réelles.

3. Le polynôme caractéristique a une racine réelle double s ($\Delta = 0$)

$y_1 = e^{st}$ est solution de l'équation, et aussi $y_2 = te^{st}$.

En effet

$$a\ddot{y}_2 + b\dot{y}_2 + cy_2 = (a(2s + s^2t) + b(1 + st) + ct)e^{st} = 0.$$

La solution générale sur R de l'équation sans second membre est

$$y = e^{st}(c_1 + c_2t) \quad (1.7)$$

La solution générale de l'équation sans second membre $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$, où a , b et c sont des réels et $a \neq 0$ est

$at^2 + bt + c = 0$	solution générale
deux racines réelles distinctes r_1 et r_2	$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
une racine réelle double s	$y(t) = (At + B)e^{st}$
deux racines complexes conjuguées λ et $\bar{\lambda}$	$y(t) = e^{\alpha t}(A \cos(\alpha t) + B \sin(\alpha t))$

où A et B sont des constantes réelles.

Nous avons montré que ces fonctions étaient bien solutions de l'équation sans second membre; nous admettrons que ce sont les seules.

Solution particulière de l'équation complète

Rappelons d'abord deux choses.

✓ Toute astuce est bonne pour trouver une solution de $ay'' + by' + cy = f(t)$.

✓ On peut décomposer $f(t)$ en morceaux plus simples. Si $f(t) = f_1(t) + \dots + f_k(t)$ et si

$$az_1'' + bz_1' + cz_1 = f_1(t)$$

⋮

$$az_k'' + bz_k' + cz_k = f_k(t),$$

alors $z = z_1 + \dots + z_k$ vérifie $az'' + bz' + cz = f(t)$. C'est ce qu'on appelle le "principe de superposition des solutions".

Nous passons en revue quelques cas particuliers importants où l'on connaît a priori la forme d'une solution particulière.

Second membre de la forme $f(t) = e^{\lambda t}P(t)$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P(t)$ polynôme.

On cherche une solution de la même forme, c-à-d de la forme $f(t) = e^{\lambda t}Q(t)$ où $Q(t)$ est aussi un polynôme:

✓ de degré égal au degré de P si λ n'est pas racine du polynôme caractéristique ($a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$).

✓ de la forme $tQ_1(t)$ avec $\deg Q_1 = \deg P$ si λ est racine simple du polynôme caractéristique.

✓ de la forme $t^2Q_2(t)$ avec $\deg Q_2 = \deg P$ si λ est racine double du polynôme caractéristique.

On trouve les coefficients de Q par identification.

Donnons deux exemples.

Exemple 1.

$\ddot{y} + \dot{y} + y = t^2 + t + 1$. Ici il n'y a pas d'exponentielle, ce qui revient à dire que $\lambda = 0$; ce n'est pas une racine du polynôme caractéristique. On cherche une solution $y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

En la portant dans l'équation on trouve

$$\alpha t^2 + (\beta + 2\alpha)t + \gamma + \beta + 2\alpha = t^2 + t + 1.$$

L'identification des coefficients nous donne un système linéaire de trois équations à trois inconnues, que l'on résout facilement en $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$. On a donc comme solution particulière $t^2 - t$.

Exemple 2

$$\ddot{y} - \dot{y} = e^t(t + 1).$$

Ici $\lambda = 1$ qui est racine simple du polynôme caractéristique. On recherche une solution de la forme $y = e^t t(\alpha t + \beta)$. En la portant dans l'équation on trouve $e^t(2\alpha t + 2\alpha + \beta) = e^t(t + 1)$, ce qui donne $\alpha = 1/2$ et $\beta = 0$, et la solution particulière $y = e^t t^2/2$. Remarquer dans le calcul que le fait que $\lambda = 1$ est racine simple du polynôme caractéristique se manifeste par la disparition du terme en t^2 .

Second membre de la forme:

$f(t) = e^{rt} \cos(st)P(t)$ ou $f(t) = e^{rt} \sin(st)P(t)$ où $P(t)$ est un polynôme. On peut se ramener au cas précédent en constatant qu'on a dans le premier cas la partie réelle de $e^{(r+is)t}P(t)$, et dans le second cas la partie imaginaire. On procède alors comme ci-dessus, avec $\lambda = r + is$ complexe. Traitons l'exemple

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = e^t \cos t.$$

Le second membre est la partie réelle de $f(t) = e^{(1+i)t}$. Ici $\lambda = 1+i$ est racine simple de l'équation caractéristique. On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre $f(t)$, de la forme $e^{(1+i)t}\alpha t$. En remplaçant dans l'équation, on trouve $e^{(1+i)t}(2i\alpha) = e^{(1+i)t}$, d'où $\alpha = -i/2$ et la solution particulière complexe $-ite^{(1+i)t}/2$ de l'équation avec second membre $f(t)$. La partie réelle $1/2te^t \sin t$ est une solution particulière de l'équation proposée. Une autre façon de mener le calcul, sans passer par le complexe, est de rechercher une solution de la forme $e^{rt}(Q(t)\cos(st) + R(t)\sin(st))$ où $Q(t)$ et $R(t)$ sont des polynômes d'un des deux premiers types présents ci-dessus, suivant que $r + is$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, ou est racine simple (comme le polynôme caractéristique est à coefficients réels, le cas d'une racine double non réelle ne se présente pas).

Solution vérifiant des conditions initiales

On considère une équation

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = f(t)$$

où f est définie et continue sur un intervalle ouvert I . Soit t_0 un point de I .

Proposition 1.1. *Étant donnés deux réels y_0 et \dot{y}_0 , il existe une et une seule solution y de l'équation différentielle telle $y(t_0) = y_0$ et $\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$.*

Les conditions initiales en t_0 sont les deux équations $y(t_0) = y_0$, $\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$. On a pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants un résultat d'existence et d'unicité de solution vérifiant des conditions initiales. On sait que la solution générale de l'équation (1.5) s'écrit $y(t) = z(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$, où $z(t)$ est une solution particulière de (1.5), $y_1(t)$ et $y_2(t)$ les solutions fondamentales de l'équation sans second membre, c_1 et c_2 des constantes réelles. Il faut choisir ces constantes pour que

$$c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0 - z(t_0)$$

$$c_1 \dot{y}_1(t_0) + c_2 \dot{y}_2(t_0) = \dot{y}_0 - \dot{z}(t_0)$$

On admet qu'il y a existence et unicité des solutions.

1.4 Système d'équations différentielles linéaire

Un système différentiel linéaire d'ordre n est un système d'équations différentielles linéaires de la forme

$$\dot{y}_1(t) = a_{11}(t)y_1(t) + \dots + a_{1n}(t)y_n(t) + b_1(t),$$

...

$$\dot{y}_n(t) = a_{n1}(t)y_1(t) + \dots + a_{nn}(t)y_n(t) + b_n(t),$$

où y_1, \dots, y_n sont les fonctions inconnues à déterminer, et les a_{ij} et b_i sont supposées données.

Ce système différentiel peut manifestement s'écrire comme une seule équation différentielle dans \mathbb{R}^n :

$$\dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + B(t)$$

où A est la matrice des coefficients a_{ij} , et on introduit les vecteurs de \mathbb{R}^n $Y = (y_1, \dots, y_n)$, $\dot{Y} = (\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n)$ et $B = (b_1, \dots, b_n)$.

Remarque 1.4. L'équation (ou le système) est dite *homogène* lorsque $B = 0$, et *non homogène* lorsque $B \neq 0$.

Théorème 1.2. *Toute équation non autonome dans \mathbb{R}^n , $\dot{y}(t) = f(y(t), \tau(t))$, peut être transformée en une équation autonome dans \mathbb{R}^{n+1} par adjonction d'une variable supplémentaire $\tau(t) = t$.*

En effet, puisque $\tau(t) = t$, l'équation

$$\dot{y}(t) = f(y(t), t), \dot{\tau}(t) = 1$$

constitue bien une équation différentielle d'ordre $n + 1$ pour les variables (y, τ) .

1.5 Système d'équations différentielles du 1er ordre

Une équation différentielle d'ordre élevé de type (1.2) peut se ramener à un système d'ordre plus bas.

Théorème 1.3. *Toute équation différentielle d'ordre n ($n \geq 1$), linéaire ou non linéaire, peut être transformée en un système de n équations différentielles du 1er ordre.*

Soit donc l'équation différentielle d'ordre n :

$$y^{(n)} = f(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}, t).$$

Introduisons n nouvelles fonctions:

$z_1 = y$, $z_2 = \dot{y}$, ..., $z_n = y^{(n-1)}$; L'équation différentielle est alors équivalente au système différentiel portant sur les nouvelles variables z_1, \dots, z_n .

De sorte qu'une équation d'ordre n se ramène à un système de n équations différentielles d'ordre 1:

$$\dot{z}_1 = z_2,$$

...

$$\dot{z}_{n-1} = z_n$$

$$\dot{z}_n = f(z_1, z_2, \dots, z_n, t)$$

Remarque 1.5. Un système différentiel arbitraire de n équations différentielles du 1er ordre, ne peut pas, en général, être ramené à une seule équation différentielle d'ordre n .

1.6 Méthodes numériques de résolution des équations différentielles ordinaires

La résolution analytique des équations différentielles ordinaires n'est pas toujours possible. Depuis de nombreuses années on assiste à l'explosion de l'utilisation de méthodes numériques pour la résolution d'équations et de systèmes différentielles ordinaires.

Ces méthodes numériques permettent d'obtenir des solutions approchées.

1.6.1 Problème de Cauchy

Soit I_0 désigne un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point. On se donne une fonction f définie et continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^m$ à valeurs dans \mathbb{R}^m ainsi qu'un élément y_0 de \mathbb{R}^m . On cherche à trouver une fonction y continue et dérivable sur l'intervalle I_0 à valeurs dans \mathbb{R}^m .

On appelle *problème de Cauchy* le système d'équations

$$\forall t \in I_0, y'(t) = f(t, y(t)) \quad (1.8)$$

$$y(t_0) = y_0. \quad (1.9)$$

La condition (1.9) s'appelle *condition initiale*. Une fonction y qui vérifie les équations (1.8) est appelée intégrale du système différentiel (1.8), (1.9).

Dans de nombreux exemples physique, la variable t représente le temps, l'instant t_0 est appelé *instant initial*.

Remarque 1.6. L'existence et l'unicité de la solution du problème (1.8) (1.9) n'est pas garantie.

Existence et unicité

Définition 1.1. La fonction $f : I_0 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est *lipschitzienne* en y et *uniforme* en t s'il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\forall t \in I_0, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m, \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|.$$

L est appelée *constante de Lipschitz* de f .

Théorème 1.4. (*Cauchy - Lipschitz*)

Si la fonction $f : I_0 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ vérifie les hypothèses

1. *f est continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^m$;*

2. *f est lipschitzienne en y uniformément continue en t*

alors le problème de Cauchy admet une solution unique de classe C^1 .

1.6.2 La méthode d'Euler

Nous allons maintenant résoudre le problème de *Cauchy* décrit précédemment. Nous allons étudier la plus simple des méthodes, la méthode d'Euler connue aussi sous le noms de méthode d'Euler progressive.

Soit y^* la fonction solution de l'équation différentielle $\dot{y} = f(t; y)$ pour $t \in [t_0, T]$, vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

On partage l'intervalle $[t_0; T]$ en N intervalles égaux de longueur $h = \frac{T-t_0}{N}$.

Soient $t_0, t_1 = t_0 + h, \dots, t_i = t_0 + ih, \dots, t_N = T$ les points de subdivision.

Principe de la méthode

En un point quelconque $M(t, y)$ de la courbe intégrale, la pente de la tangente est connue et a pour valeur $m = f(t, y)$.

Le principe de la méthode d'Euler consiste à remplacer sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ la courbe intégrale par sa tangente au point M_i d'abscisse t_i .

Soit M_0 le point de coordonnées (t_0, y_0) . Sur $[t_0, t_1]$, on remplace la courbe intégrale par sa tangente en M_0 . Le point M_1 a donc comme ordonnées $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$. On recommence sur $[t_1, t_2]$ en partant du point M_1 , on obtient ainsi le point M_2 d'ordonnée $y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$. Ce qui donne la relation de récurrence : $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$, $i = 0, \dots, N - 1$.

La résolution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall t \in [t_0, T], \dot{y} = f(t, y(t)) & ; \\ y(t_0) = y_0 & . \end{cases}$$

conduit au schéma suivant :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i), \\ t_{i+1} = t_i + h, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1. \end{cases} \quad (1.10)$$

1.6.3 Estimation de l'erreur de consistance

On cherche à obtenir une estimation de l'erreur

$$e_i = y(t_i) - y_i$$

entre la solution exacte de (1.8) et la solution approchée donnée par (1.10).

On a

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) - hf(y(t_i), t_i) = \varepsilon_i$$

$$y_{i+1} - y_i - hf(y_i, t_i) = 0.$$

Par soustraction, on obtient

$$e_{i+1} = e_i + h(f(y(t_i), t_i) - f(y_i, t_i)) + \varepsilon_i$$

d'où en utilisant la condition de Lipschitz

$$|e_{i+1}| \leq |e_i| + h|f(y(t_i), t_i) - f(y_i, t_i)| + |\varepsilon_i|$$

$$|e_{i+1}| \leq |e_i| + h|y(t_i) - y_i| + Ch^2$$

$$(1 + hL)|e_i| + |\varepsilon_i|$$

1.6.4 Méthode de Runge-Kutta

Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes d'analyse numérique d'approximation de solutions d'équations différentielles. Elles ont été nommées ainsi en l'honneur des mathématiciens Carl Runge (1856-1927) et Martin Wilhelm Kutta (1867-1944) lesquels élaborèrent la méthode en 1901.

Ces méthodes reposent sur le principe de l'itération, c'est-à-dire qu'une première estimation de la solution est utilisée pour calculer une seconde estimation, plus précise, et ainsi de suite.

On considère un problème de *Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

En introduisant un schéma numérique de la forme

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h, \\ y_{i+1} = y_i + h\phi(t_i, y_i, h_i) \end{cases}$$

où la fonction d'incrémentation ϕ est une approximation de $f(t, y(t))$ sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$.

Supposons un entier r , une matrice A carrée d'ordre r dont les éléments triangulaires supérieurs sont nuls y compris la diagonale, et un vecteur $b = (b_1, b_2, \dots, b_r)$. L'algorithme de Runge-Kutta est le suivant:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(b_1 k_1 + \dots + b_r k_r), \\ t_{i+1} = t_i + h, \\ k_j = f(t_i + c_j h, y_i + h(a_{j1} k_1 + \dots + a_{jr} k_r)) \quad . \end{cases}$$

Le vecteur b vérifie $b_1 + \dots + b_r = 1$

avec c_j la somme des éléments de la $j^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A .

Méthode d'ordre 1 ($r=1$)

pour $b = 1$, $a_{11} = 0$

l'algorithme $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$ se réduit à la méthode d'Euler.

Méthode d'ordre 2 ($r=2$)

Pour déterminer toutes les méthodes d'ordre 2 suivant le principe décrit ci-dessus, on remplace sur chaque intervalle la courbe intégrale par un arc de parabole. Connaissant y_0 ordonnée de M_0 , il faut calculer y_1 ordonnée de M_1 : $y_1 = y_0 + mh$ où m est la pente de M_0M_1 . Pour une parabole, la tangente au point p d'abscisse $\frac{1}{2}(t_0 + t_1)$ est parallèle à la corde M_0M_1 . On a donc :

$$m = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_p\right)$$

y_p n'est pas connu, et on le calcule par une valeur approchée en utilisant la méthode d'Euler sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \frac{h}{2}]$. On prend donc $m = f\left[t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}f(t_0; y_0)\right]$.

La formule $y_1 = y_0 + mh$ peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_0, y_0), \\ k_2 = hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right), \\ y_1 = y_0 + k_2. \end{cases}$$

Méthode d'ordre 4

La méthode RK4 utilise plusieurs points intermédiaires pour calculer la valeur de y_{i+1} à partir de la valeur de y_i .

On considère un point intermédiaire d'abscisse $t_i + \frac{h}{2}$ dont la valeur de l'ordonnée est donnée par :

$$y_{ia} = y_i + \left(\left(\frac{dy}{dt}\right)_i\right) \times \frac{h}{2}.$$

Soit $y_{ia} - y_i = \left(\left(\frac{dy}{dt}\right)_i\right) \times \frac{h}{2} = \frac{k_1}{2}$.

puis un point 'b' d'ordonnée :

$$y_{ib} = y_i + \left(\left(\frac{dy}{dt}\right)_{ia}\right) \times \frac{h}{2}.$$

Soit $y_{ib} - y_i = \left(\left(\frac{dy}{dt}\right)_{ia}\right) \times \frac{h}{2} = \frac{k_2}{2}$.

On calcule alors l'ordonnée d'un point 'c' d'abscisse $t_i + h$ à l'aide de la relation:

$$y_{ic} = y_i + \left(\frac{dy}{dt}\right)_{ib} \times h = k_3.$$

Soit $y_{ic} - y_i = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{ib} \times h = k_3$.

Soit $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{ic}$ la valeur de $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ au point 'c'.

On pose :

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{ic} \times h = k_4.$$

L'ordonnée définitive y_{i+1} du point d'abscisse $t_i + h$ à l'aide de la relation :

$$y_{ic} = y_i + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dy}{dt}\right)_i + 2\left(\frac{dy}{dt}\right)_{ia} + 2\left(\frac{dy}{dt}\right)_{ib} + \left(\frac{dy}{dt}\right)_{ic} \right] \times h$$

alors on peut écrire:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

La méthode RK4 définie par le schéma suivant:

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h, \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \end{cases} .$$

Avec:

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_i; y_i), \\ k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 = hf(t_i + h; y_i + k_3). \end{cases}$$

1.7 Conclusion

La plupart des mathématiciens ont touché de près ou de loin aux équations différentielles et le nombre de domaines où elles interviennent ne serait qu'un vaste catalogue des 80% des mathématiques et de la physique moderne. Parmi ces domaines utilisant les équations différentielles, on retrouve la théorie du contrôle optimal qui fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Théorie du contrôle optimal et des systèmes de contrôle

2.1 Introduction

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères.

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques,... etc. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes.

Une fois le problème de contrôlabilité est résolu, on peut de plus vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère, on parle alors d'un problème de contrôle optimal.

2.2 Le but de la commande

Dans un problème de contrôle, le but de la commande consiste à ramener l'objet de la position initiale $x_0 = x(t_0)$, ($x_0 \in M_0$) à une autre position $x_1 = x(T)$, ($x_1 \in M_1$) où M_0 est l'ensemble de départ, et M_1 l'ensemble

d'arrivée.

2.3 Classe des commandes admissibles

U est l'ensemble des contrôles admissibles qui peut être non bornés, borné ou de type Bang-Bang.

2.3.1 Commande bornée

Dans beaucoup de problèmes de contrôle, on peut minorer et majorer les $u_j(t)$ par des constantes. De plus si $a_j \leq u_j \leq b_j$, on peut remplacer u_j par v_j en posant $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + (a_j - b_j)v_j$ et ainsi v_j est aussi intégrable et l'on a $-1 \leq v_j \leq 1$.

Donc lorsque U est borné, il est toujours pratique de ce ramener à des commandes entre -1 et 1 .

2.3.2 Commande Bang-Bang

On suppose que U est un polyèdre (cube) $[-1,1]^m$ dans \mathbb{R}^m . Un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle Bang-Bang si pour chaque temps t et chaque indice $j = 1, \dots, m$, on a $|u_j(t)| = 1$. En d'autres termes, une commande Bang-Bang est une commande qui possède au moins un switch.

2.4 Fonction objectif

Lors de la conception du transfert d'un système dynamique commandé vers un point de l'espace d'état, il est nécessaire de prendre en compte plusieurs critères, en général en conflit les un avec les autres. Parmi ces critères, on peut penser à :

- l'énergie dépensée,
- le temps de transfert,
- l'écart par rapport à une trajectoire de référence,

- la robustesse par rapport à des perturbations,
- La complexité du problème de calcul de la commande,
- La simplicité de mise en oeuvre en temps réel.

Le problème revient à définir une expression mathématique appelée fonction objectif ou fonctionnelle coût qui, lorsqu'elle est optimisée, indique que le système est exécuté de la façon la plus souhaitable.

La fonction objectif est généralement décrite par la formule

$$J(x,u) = g(T,x_1) + \int_0^T f_0(t,x,u)dt$$

Cette fonctionnelle a deux parties: $g(T,x_1)$ est le coût terminal, c'est une sorte de pénalité liée à la fin de l'évolution du système au temps final T . Il a son importance lorsque T est libre, sinon il est constant. $\int_0^T f_0(t,x,u)dt$ dépend de l'état du système tout au long de la trajectoire de la solution, définie par les variables d'état. Elle dépend aussi du temps t mais surtout des variables de contrôle u .

On peut classer les fonctions objectif en deux critères physiques de performance:

Définition 2.1. On parle d'un problème en temps optimal lorsque $f_0(t,x,u) = 1$, $g(T,x_1) = 0$ et le temps final T est libre dans l'expression de $\min_u \int_0^T 1dt$.

Définition 2.2. On parle d'un problème en coût optimal lorsque le temps final T est fixé dans l'expression $\min_u \int_0^T f_0(t,x,u)dt + g(T,x_1)$.

2.5 Formulation générale d'un problème de contrôle optimal

Le problème de contrôle optimal que nous allons considérer est de la forme :

$$\begin{aligned} \min_{t,x,u} \quad & J(x,u) = \int_0^T f_0(t,x,u) dt \\ \text{s.c} \quad & \dot{x} = f(t,x,u) \\ & x(0) = x_0 \in M_0, \quad x(T) = x_1 \in M_1 \\ & u \in U \end{aligned}$$

Remarque 2.1. Le système commence en un temps initial $t_0 = 0$ avec une certaine configuration $x(t_0) = x_0$, ou x_0 est l'état initial du système. On peut également se placer dans le cas où x_0 est un point d'un ensemble notée $M_0 \subset \mathbb{R}^n$. De manière similaire, en un temps final T , on aura $x(T) = x_1$ ou x_1 est l'état final du système. On distingue deux cas pour le temps final: T fixé et T libre, et deux possibilités pour l'état final: x_1 est donné ou seulement imposé qu'il appartient à un ensemble appelé cible noté $M_1 \subset \mathbb{R}^m$.

Définition 2.3. On définit un système de contrôle par un système différentiel de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

où

$$f : I \times V \times U \rightarrow \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{C}^1.$$

I est un intervalle de \mathbb{R}^n .

V est un ouvert de \mathbb{R}^n .

U est un ouvert de \mathbb{R}^m .

$$(t_0, x_0) \in I \times V.$$

Définition 2.4. L'ensemble accessible en temps T pour le système (2.1), noté $Acc(x_0, T)$, est l'ensemble des extrémités au temps T des solutions du système partant de x_0 au temps $t = 0$. Autrement dit, c'est l'image de l'application entrée-sortie en temps T .

Définition 2.5. L'application entrée-sortie en temps $T > 0$ du système contrôlé (2.1) initialisé à x_0 est l'application

$$\begin{aligned} E_T : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\rightarrow x_u(T) \end{aligned}$$

où U est l'ensemble des contrôles admissibles.

Autrement dit, l'application entrée-sortie en temps T associée à un contrôle u le point final de la trajectoire associée à u .

Soit u un contrôle défini sur $[0, T]$ tel que sa trajectoire associée x_u issue de $x(0) = x_0$ est définie sur $[0, t_1]$. On dit que le contrôle u (ou la trajectoire x_u) est singulier sur $[0, T]$ si la différentielle de Fréchet $dE_T(u)$ de l'application entrée-sortie au point u n'est pas surjective, sinon on dit qu'il est régulier.

2.6 Système de contrôle linéaire

La formulation mathématique d'un système de contrôle linéaire est donnée par

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in I \quad (2.2)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et appelé vecteur contrôle, I un intervalle de \mathbb{R} , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $r \in \mathbb{R}^n$ sont trois applications localement intégrales sur I .

L'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables localement bornées sur I à valeurs dans un sous ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$.

Soit $M(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ définie par $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$, $M(0) = Id$.

Pour tout contrôle u le système

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0$$

admet une unique solution $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue donnée par

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds$$

pour tout $t \in I$.

Remarque 2.2. Si $r = 0$ et $x_0 = 0$, la solution du système s'écrit:

$$x(t) = M(t) \int_0^t M(s)^{-1}B(s)u(s)ds.$$

Cette solution est linéaire en u .

2.7 Contrôlabilité

Pour déterminer une trajectoire optimal joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable. Le problème de contrôlabilité est l'un des concepts centraux de la théorie du contrôle. C'est la possibilité d'influencer l'état du système (sortie) en manipulant les entrées (commandes). Existe-t-il un contrôle u tel que la trajectoire associée x conduit le système de $x_0 \in M_0$ à $x_1 \in M_1$ en un temps fini?

La notion de contrôlabilité a été introduite en 1960 par Kalman pour des systèmes linéaires de la forme $\dot{x} = Ax + Bu$. L'état x évolue dans un espace vectoriel réel E , de dimension n . On dit que $\dot{x} = Ax + Bu$ est contrôlable, si l'on peut joindre deux points de l'espace d'état, c'est à dire si, et seulement si étant donnés deux points $x_0, x_1 \in E$ et deux instants t_0, T avec $t_0 < T$, il existe une commande u , définie sur $[t_0, T]$, telle que $x(t_0) = x_0$ et $x(T) = x_1$.

2.7.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Le théorème suivant donne une condition générale pour la contrôlabilité des systèmes linéaires.

Théorème 2.1. *Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice*

$$C(T) = \int_0^T M(t)^{-1} B(t) B(t)' M(t)^{-1} dt,$$

dite matrice de contrôlabilité, est inversible.

Proposition 2.1. *Si u est un contrôle régulier sur $[t_0, T]$, alors le système est localement contrôlable le long de la trajectoire associé à ce contrôle.*

Remarque 2.3. En général, le problème de contrôlabilité globale est difficile. Cependant, il existe des techniques qui permettent de déduire la contrôlabilité locale dans le cas des systèmes linéarisés.

2.7.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est dit autonome lorsque les matrices A et B ne dépendent pas de t . Dans ce cas, la matrice $M(t) = e^{tA}$,

et la solution du système associée au contrôle u s'écrit, pour tout $t \in I$:

$$x(t) = e^{tA}(x^0 + \int_0^t e^{-sA}(B(s)u(s) + r(s))ds).$$

Cas sans contrainte sur le contrôle "Condition de Kalman"

le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t .

Théorème 2.2. *On suppose que $U = \mathbb{R}^m$ (pas de contrainte sur le contrôle). Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en temps T (quelconque) si et seulement si la matrice*

$$C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$$

est de rang n .

La matrice C est appelée *matrice de Kalman*, et la condition $\text{rang } C = n$ et appelée *condition de Kalman*.

Remarque 2.4. La condition de Kalman ne dépend ni de T ni de x_0 autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est contrôlable en toute temps depuis tout point.

Cas avec contrainte sur le contrôle

Dans le théorème (2.2) on n'a pas mis de contrainte sur le contrôle. Dans le cas où le contrôle u est contraint d'appartenir à un sous ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$, les propriétés de contrôlabilité globale sont reliées aux propriétés de stabilité de la matrice A . Il est clair que si $r = 0$ et $0 \in U$, si la condition de Kalman est vérifiée et si la matrice A est stable (toutes les valeurs propres de A sont de parties réelles strictement négatives), alors tout point de \mathbb{R}^n peut être conduit à l'origine en temps fini.

Dans le cas mono-entrée $m = 1$ (u est un contrôle scalaire), on a le théorème suivant:

Théorème 2.3. *On considère le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, $b \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in U$ où U est un intervalle de \mathbb{R} avec $0 \in U$. Alors tout point de \mathbb{R}^n peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si la matrice*

$C = (b, Ab, \dots, A^{n-1}b)$ est de rang n et la partie réelle de chaque valeur propre de A est inférieure ou égale à 0.

2.8 Problème en temps minimal pour les systèmes linéaires

2.8.1 Existence de trajectoires en temps-optimal

Soient x_0 et x_1 deux points de \mathbb{R}^n . Supposons que x_1 soit accessible depuis x_0 , c'est-à-dire qu'il existe au moins une trajectoire reliant x_0 à x_1 . Parmi toutes les trajectoires reliant x_0 à x_1 , on aimerait caractériser celles qui le font en temps minimal.

Si T est le temps minimal, alors pour tout $t < T$, $x_1 \notin \text{Acc}(x_0, t)$ (en effet sinon x_1 serait accessible à partir de x_0 en un temps inférieur à T).

Par conséquent,

$$T = \inf\{t > 0 \mid x_1 \in \text{Acc}(x_0, t)\}.$$

Le temps $t = T$ est le premier temps pour lequel $\text{Acc}(x_0, t)$ contient x_1 .

Si le point x_1 est accessible depuis x_0 alors il existe une trajectoire temps minimal reliant x_0 à x_1 .

2.8.2 Existence de la commande optimale

Théorème 2.4. *Si le système est complètement contrôlable et si les valeurs propres de A sont toutes à partie réelle non positive alors une commande optimale en temps minimum conduisant x_0 en $x(T) = 0 \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe toujours.*

2.8.3 Unicité de la commande optimale

Théorème 2.5. *Si le système est complètement contrôlable alors il n'existe qu'une seule commande extrémale égale à la commande optimale en temps*

minimum. Dans ce cas, si ses n pôles sont réels la commande optimale $u^(t)$ peut commuter au plus $n - 1$ fois.*

Dans le cas régulier, toutes les trajectoires extrêmes sont bang-bang et le nombre de commutations est uniforme sur toute partie compacte de \mathbb{R} .

Remarque 2.5. Si le système est temps-variant ($\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$), l'unicité des extrémales et de la commande optimale est toujours vraie.

2.8.4 Condition nécessaire et suffisante de singularité

Théorème 2.6. *Un système admet une commande optimale en temps minimum singulière sur $[t_0, T]$ ssi le système n'est pas contrôlable.*

2.9 Principe du maximum de Pontryagin

Considérons le problème de contrôle optimal suivant:

$$\begin{aligned} \min_{t,x,u} J(x; u) &= \int_0^T f_0(t,x,u) dt \\ \dot{x} &= f(t,x,u) \\ x(0) &= x_0 \in M_0; \quad x(T) = x^1 \in M_1 \\ u &\in U \end{aligned}$$

Les conditions d'optimalité du problème de contrôle optimal s'écrivent:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p_0, u(t)) \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p_0, u(t)) \\ u^*(t) &= \operatorname{argmin}_{u \in U} H(x, u, t, p) \end{aligned}$$

où

$$H = (t, x, p, p_0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p_0 f_0(t, x, u)$$

Ces conditions d'optimalité définissent donc des conditions que doit remplir la solution du problème de contrôle optimal.

Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel $p_0 \leq 0$ tels que le couple $(p(\cdot), p_0)$ est non trivial, et tels que, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p_0, u(t)) \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p_0, u(t))\end{aligned}$$

et vérifiant la condition du maximum

$$H(t, \cdot, p, u) = \max_{v \in U} H(t, x, p, v).$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final T

$$\max_{v \in U} H(T, x(T), p(T), p_0, v) = -p_0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)).$$

La fonction H ne dépend pas de x_0 d'où $\dot{p}_0(t) = 0$, c'est à dire $p_0(t)$ est constant sur $[0, T]$.

Remarque 2.6. La convention $p_0 \leq 0$ conduit au principe du maximum, tandis que $p_0 \geq 0$ conduit au principe du minimum.

Théorème 2.7. *Considérons le système de contrôle linéaire*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0$$

où le domaine de contraintes $U \subset \mathbb{R}^m$ sur le contrôle est compact. Soit $T > 0$.

Le contrôle u est extrémal sur $[0, T]$ si et seulement s'il existe une solution non triviale $p(t)$ de l'équation $\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$ telle que

$$p(t)B(t)u(t) = \max_v p(t)B(t)v$$

pour presque tout $t \in [0, T]$. Le vecteur ligne $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint.

Proposition 2.2. *Considérons dans \mathbb{R}^n le système linéaire autonome $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, avec $B \in \mathbb{R}^n$ et $|u(t)| \leq 1$, et où la paire (A, B) vérifie la condition de Kalman.*

1. *Si toute valeur propre de A est réelle, alors tout contrôle extrémal a au plus $n - 1$ commutation sur \mathbb{R}^+ .*
2. *Si toute valeur propre de A a une partie imaginaire non nulle, alors tout contrôle extrémal a un nombre infini de commutation sur \mathbb{R}^+ .*

2.10 Conclusion

Cette section a été dédiée à l'étude de la théorie de contrôle optimal, et des méthodes pratique pour leur résolution notamment l'utilisation du principe du maximum de Pontryaguin. On a vu qu'un problème de contrôle en temps optimal ne présente qu'un type particulier de ces problème, en constatant que la fonctionnelle coût rencontrée dans l'intégrale vaut 1. Le chapitre suivant sera consacré à ce type de problème en présence de contraintes interdépendantes sur les commandes.

Chapitre 3

Problème linéaire de contrôle en temps optimal sur une classe de commandes interdépendantes

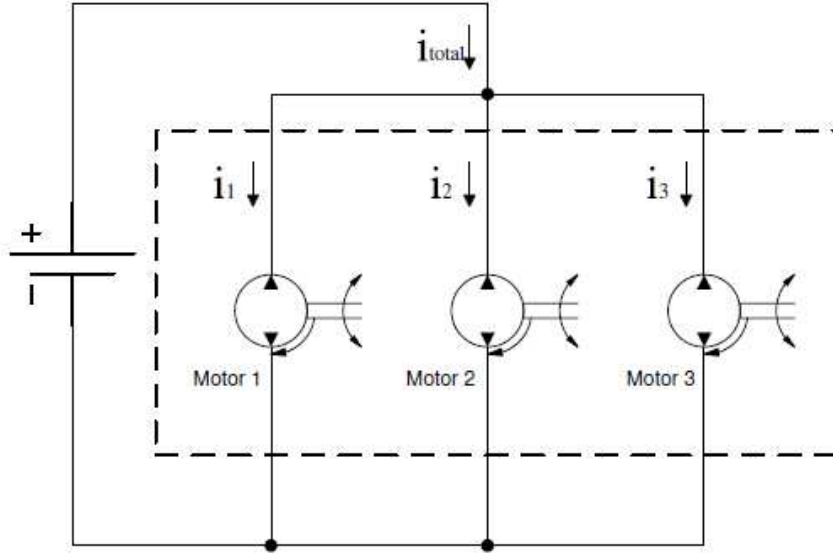
3.1 Introduction

Les contraintes d'entrée et les contraintes d'état, jouent un rôle important dans le développement de l'optimisation. Au début, les problèmes optimaux sans contraintes ont été résolus par des techniques fondamentales (géométrie, dérivée).

Plus tard, avec le développement du calcul des variations, les problèmes d'optimisation ont pu être manié aussi bien sous des contraintes d'égalité. Plus récemment, pour accomplir les exigences de plusieurs d'applications pratiques, les contraintes d'inégalité sont naturellement mis en évidence dans la littérature, où le principe de maximum de Pontryaguin (PMP) et la programmation dynamique sont devenues deux outils traditionnels pour traiter ce type de contraintes.

3.2 Position de problème

Puisque les actionneurs dans les systèmes physiques sont toujours bornés, la contrainte d'entrée mérite bien une sérieuse considération.

FIG. 3.1 – Un circuit d'entraînement avec les contraintes actuelles de Θ et Π

Dans un problème de contrôle en temps optimal, les contraintes sur le contrôle s'écrivent sous la forme standard:

$$\Pi = \{u(t) : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}^r; |u_i(t)| \leq 1\} \quad (3.1)$$

où $i = 1, \dots, r$ et r la dimension du vecteur d'entrée $u(t)$. Chaque composante u_i de la commande d'entrée dans Π est limitée par une borne indépendante.

Dans beaucoup de systèmes physiques, toutes les commandes d'entrée dépendent des autres, dans ce cas, la contrainte Θ d'entrée sera considérée

$$\Theta = \{u(t) : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}^r; \sum_{i=1}^r |u_i(t)| \leq 1\} \quad (3.2)$$

où toutes les capacités d'entrée sont couvertes par une borne unité.

Par exemple, en prenant le circuit décrit dans la figure 3.1. Le courant dans n'importe quel fil n'est pas autorisé à dépasser le seuil donné I pour des considérations de sécurité.

En effet selon la loi de Kirchhoff, les courants doivent satisfaire $i_t = i_1 + i_2 + i_3 \leq I$.

Si la contrainte d'entrée Π est considérée, pour limiter les courants circulant à l'intérieur du rectangle en pointillés sur la figure 3.1 où $i_{1,2,3} \leq I$, le courant résultant peut provoquer un dommage du circuit par $i_t = i_1 + i_2 + i_3 > I$. Ainsi, une contrainte sur le courant du type $i_t = \sum_{k=1}^3 i_k \leq I$ est suffisante pour garantir la sécurité du circuit.

D'autres motivations proviennent des applications de transports telles que les véhicules terrestres. Leurs forces d'entraînement f est la combinaison de frottements de quatre pneus f_1, f_2, f_3 et f_4 et on a $f = \sum_{k=1}^4 f_k \leq \mu mg$, où μ est le coefficient de frottement, m est la masse du véhicule et g est l'accélération de la pesanteur. En outre, la contrainte d'entrée Θ se pose également dans d'autres disciplines, telles que la finance et l'économie.

La contrainte d'entrée Θ n'a pas attiré beaucoup d'attention, car on a pensé qu'elle possède les mêmes attributs que la contrainte Π pour des problèmes de contrôle en temps optimal.

Cependant, remplacer Π par Θ débouchera sur plusieurs différences significatives. On montrera dans ce travail que le contrôle à temps optimale sous contrainte d'entrée Θ devient un contrôle dynamique à une seule entrée, dont les canaux d'entrée restent inactif sauf un seul un canal qui reste excité à sa valeur extrême. Le canal actif commute d'un intervalle à un autre sur les différents canaux.

Ensuite, s'il existe des canaux d'entrée jamais utilisés aussi bien avec des colonnes identiques dans la matrice d'entrée B , un concept appelé réduction des entrées est introduit, dans lequel les colonnes identiques peuvent être supprimées sans affecter le temps optimal. Après la définition de la normalité pour le problème avec la contrainte Θ , l'existence de DSIC et la réduction des entrées sera prouvée.

3.3 Formulation du problème

On considère un système $\dot{x} = Ax + Bu$, à commande bornée $|u| \leq 1$. Le but est de trouver la commande optimale amenant ce système d'un état initial x_0 , à l'état final $x_f = 0$ en temps minimum.

3.3.1 problème 3.1.

Le problème de contrôle à temps optimal avec la contrainte d'entrée Θ peut être exprimé comme suit:

$$\min \int_0^T 1 \cdot dt$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

avec

$x(t) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u(t) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^r$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$.
Le but est de ramener le système d'un état initial $x(0) = x_0$ vers l'origine $x(T) = 0$ (état final) en respectant la contrainte d'entrée $u(t) \in \Theta$ définie dans la formule (3.2).

3.3.2 problème 3.2.

Cependant, le problème 3.2 est identique au problème 3.1 excepté que la contrainte d'entrée $u(t) \in \Pi$ comme définie dans la formule (3.1).

3.4 Contrôle dynamique à entrée unique

Le hamiltonien du problème 3.1 est la fonction H définie par:

$$H(x(t), \lambda(t), u(t), t) = 1 + \lambda^T(t)Ax(t) + \lambda^T(t)Bu(t), \quad (3.3)$$

avec $\lambda(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ appelé vecteur adjoint.

En appliquant le principe du maximum de Pontryaguin (PMP), la fonction Hamiltonien (3.3) satisfait:

$$\begin{aligned} \min_{u \in \Theta} H &\Leftrightarrow \min_{u \in \Theta} \{ \lambda^T(t)Bu(t) \} \\ &= \min_{u \in \Theta} \{ q_1^T(t)u_1(t) + \dots + q_r^T(t)u_r(t) \} \end{aligned} \quad (3.4)$$

avec

$$q_j(t) := b_j^T \lambda(t), j = 1, \dots, r. \quad (3.5)$$

b_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice B .

Evidemment, l'équation (3.4) définit un problème de programmation non linéaire sous la contrainte Θ .

Ce problème de programmation non linéaire est équivalente au problème de programmation linéaire suivant

$$\begin{aligned}
\min J &= p_1 u_1(t) + \dots + p_r u_r(t) \\
u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_r(t) &\leq 1 \\
-u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_r(t) &\leq 1 \\
u_1(t) - u_2(t) + \dots + u_r(t) &\leq 1 \\
&\vdots \\
u_1(t) + \dots - u_i(t) + \dots + u_r(t) &\leq 1 \\
&\vdots \\
u_1(t) + u_2(t) + \dots - u_r(t) &\leq 1 \\
-u_1(t) - u_2(t) + u_3 + \dots + u_r(t) &\leq 1 \\
u_1(t) - u_2(t) - u_3 + \dots + u_r(t) &\leq 1 \\
&\vdots \\
u_1(t) + \dots - u_i(t) - u_{i+1}(t) \dots + u_r(t) &\leq 1 \\
&\vdots \\
u_1(t) + \dots + u_{r-1}(t) + u_r(t) &\leq 1 \\
-u_1(t) - u_2(t) - u_3 + \dots + u_r(t) &\leq 1 \\
&\vdots \\
-u_1(t) - \dots - u_{r-1}(t) + u_r(t) &\leq 1 \\
u_1(t) - \dots - u_{r-1}(t) - u_r(t) &\leq 1 \\
-u_1(t) - \dots - u_{r-1}(t) - u_r(t) &\leq 1
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Remarque 3.1. Beaucoup d'algorithmes de programmation linéaire (PL) peuvent être appliqués pour résoudre ce problème, puisque le nombre de contraintes d'inégalité dans (3.6) est:

$$K_r = \sum_{i=0}^r C_r^i$$

Ce qui signifie que K_r augmente très vite lorsque la dimension r des variables d'entrée grandit. Ce qui nécessite énormément de ressources de

calcul pour le résoudre.

Heureusement, grâce aux propriétés de la contrainte d'entrée Θ , une méthode assez simple sera mise en œuvre pour résoudre le problème autre qu'un algorithme PL.

Tout d'abord, nous introduisons la définition de la singularité et de la normalité.

3.4.1 Problème singulier

Définition 3.1. Le problème 3.1 est singulier s'il existe au moins un intervalle non trivial de temps (i.e $t_1 \neq t_2$) avec $[t_1, t_2] \subset [0, T^*]$ et $\xi \in [t_1, t_2]$ vérifie $|q_k(\xi)| = |q_l(\xi)| \geq |q_j(\xi)|$, où $l \neq k$ et $j = 1, \dots, r$. Dans le cas contraire, le problème est dit normal.

3.4.2 Normalité et unicité du problème 3.1

Lemme 3.1. $q_i(t) \equiv q_j(t)$ durant un intervalle de temps non trivial si et seulement si la matrice H_{ij} est singulière; autrement dit $|H_{ij}| = 0$, avec

$$H_{ij} = [(b_i - b_j) \quad A(b_i - b_j) \quad \dots \quad A^{n-1}(b_i - b_j)]$$

où $q_i(t)$ et $q_j(t)$ deux différentes composantes du vecteur $q(t)$ avec $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$.

b_i et b_j sont la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ colonnes de la matrice B respectivement.

Démonstration a) Premièrement, on démontre d'abord que si la matrice H_{ij} est singulière, alors il existe un vecteur μ non nulle qui satisfait l'équation suivante:

$$\mu^T A(b_i - b_j) = \dots = \mu^T A^n(b_i - b_j) = 0 \quad (3.7)$$

En considérant le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient:

$$\omega_{ij}(\zeta) + \alpha_1 \frac{d\omega_{ij}(\zeta)}{d\zeta} + \dots + \alpha_n \frac{d^{(n)}\omega_{ij}(\zeta)}{d\zeta^n} = 0 \quad (3.8)$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sont des constantes et

$$\omega_{ij}(\zeta) = \mu^T e^{-A\zeta} (b_i - b_j), \quad \zeta \in [0, T].$$

L'équation (3.8) est équivalente à

$$\mu^T (e^{-A\zeta} + \alpha_1 A e^{-A\zeta} + \dots + \alpha_n A^n e^{-A\zeta}) (b_i - b_j) = 0.$$

Si $\zeta = 0$, et d'après l'équation (3.7) le $\omega_{ij}(0)$ correspondant devient

$$\omega_{ij}(0) = -\mu^T (\alpha_1 A + \dots + \alpha_n A^n) (b_i - b_j) = 0,$$

qui signifie que $\omega_{ij}(\zeta) \equiv 0$ est solution de l'équation (3.8).

La solution $\omega_{ij}(\zeta) = \mu^T e^{-A\zeta} (b_i - b_j) \equiv 0$ est unique ce qui se traduit par $q_i(\zeta) = q_j(\zeta)$. La suffisance de ce théorème est prouvée.

b) Supposons qu'il existe un intervalle de temps nontrivial $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ et $\zeta \in [t_1, t_2]$ avec $q_i(\zeta) \equiv q_j(\zeta)$.

La fonction Hamiltonienne est:

$$H = 1 + \lambda^T(\zeta) A x^*(\zeta) + \lambda^T(\zeta) B u^*(\zeta) = 0 \quad (3.9)$$

avec $\dot{\lambda} = -A^T \lambda(\zeta)$ dont la solution est

$$\lambda(\zeta) = e^{-A^T \zeta} \lambda(0). \quad (3.10)$$

Si $\lambda(0) = 0$ alors $\lambda(\zeta) = 0$ ce qui conduit à une contradiction $1 = 0$ dans (3.9). Ainsi, $\lambda(0)$ ne doit pas être égal à zéro. Selon (3.5) et (3.10), on obtient $q_i(\zeta) = \lambda^T(0) e^{-A\zeta} b_i$ et $q_j(\zeta) = \lambda^T(0) e^{-A\zeta} b_j$.

D'ailleurs, on peut définir

$$\nu_{ij}(\zeta) = q_i(\zeta) - q_j(\zeta) = \lambda^T(0) e^{-A\zeta} (b_i - b_j) = 0. \quad (3.11)$$

Tant que $q_i(\zeta) = q_j(\zeta)$ alors, $\dot{\nu}_{ij}(\zeta) = 0$, $\ddot{\nu}_{ij}(\zeta) = 0$, ..., $\nu_{ij}^{(n-1)}(\zeta) = 0$.

A cause de $A e^{A\zeta} = e^{A\zeta} A$, on aura

$$\begin{cases} \nu_{ij}(\zeta) = \lambda^T(0) e^{-A\zeta} (b_i - b_j) = 0. \\ (-1)^{n-1} \nu_{ij}^{(n-1)}(\zeta) = \lambda^T(0) e^{-A\zeta} A^{n-1} (b_i - b_j) = 0. \end{cases}$$

qui peut s'écrire

$$\lambda^T(0)e^{-A\zeta}H_{ij} = 0, \forall \zeta \in [t_1, t_2] \quad (3.12)$$

avec $H_{ij} = [(b_i - b_j)A(b_i - b_j) \cdots A^{n-1}(b_i - b_j)]$. puisque $e^{-A\zeta}$ est non singulière aussi bien que $\lambda(0) \neq 0$ alors H_{ij} doit être singulière afin de vérifier l'équation (3.12).

la condition nécessaire de Théorème est prouvé.

Selon le Lemme 3.1 et la définition 3.1, on a le résultat suivant:

Théorème 3.1. *le problème 3.1 est normal si chaque matrice H_{ij} est non singulière.*

Remarque 3.2. Ce théorème est seulement une condition suffisante mais pas nécessaire pour un problème normal, ce qui sera montré dans l'exemple (3.1) où un problème normal possède une matrice singulière H_{ij} . Cependant, la singularité de la matrice H_{ij} est la même que la matrice H_{ji} après permutation des indices i et j .

3.4.3 Existence de contrôle dynamique mono-entrée

Définition 3.2. Un contrôle en temps optimal $u^*(t)$ est appelé contrôle dynamique mono-entrée si dans un intervalle de temps non trivial, un seul canal d'entrée fonctionne à sa valeur extrême alors que tous les autres canaux restent inutilisés. Le canal actif peut commuter de l'un à l'autre pendant toute la période de temps.

Le théorème suivant garantit l'existence d'un contrôle dynamique mono-entrée.

Théorème 3.2. *Si le contrôle en temps optimal existe et le problème est normal, alors le contrôle optimal de problème 3.1 est un contrôle dynamique mono-entrée.*

Démonstration

Si le contrôle en temps optimale $u^*(t)$ existe et le problème est normale, d'après la formule (3.4) et la définition 3.1, on obtient:

$$\min_{u(t) \in \Theta} H \Leftrightarrow \min_{u(t) \in \Theta} \{q_k(\zeta)u_k(\zeta)\} = -|q_k(\zeta)|$$

où $\zeta \in [t_i, t_{i+1}] \subset [0, T]$ et $t_i \neq t_{i+1}$.

Considérant différents intervalles de temps, l'indice k peut varier, ce qui résulte

$$\min_{u \in \Theta} H \Leftrightarrow \min_{u \in \Theta} \{q_{k(t)}(t)u_{k(t)}(t)\} = -\text{sgn}\{q_{k(t)}(t)\}q_{k(t)}(t)$$

pour $t \in [0, T]$. Ainsi, le canal actif $u_k(t)$ peut passer de l'un à l'autre au cours de la période de temps optimale entier $[0, T]$, et la commande optimale aura la forme suivante

$$u^*(t) = \begin{pmatrix} u_1^*(t) \\ \vdots \\ u_{k-1}^*(t) \\ u_k^*(t) \\ u_{k+1}^*(t) \\ \vdots \\ u_r^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\text{sgn}(q_{k(t)}(t)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $u^* \in \Theta$

Remarque 3.3. Si le problème de commande optimale en (3.1) est un DSIC, le problème de programmation linéaire (3.6) peut être efficacement résolu en choisissant une valeur maximale comme

$$\max\{|p1|, |p2|, \dots, |pr|\}.$$

3.5 Réduction d'entrée

Si le problème 3.1 est normal et certaines composantes $q(t)$ du vecteur de commutation satisfait

$$q_{i_1}(t) \equiv \dots \equiv q_{i_k}(t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

où $1 \leq k \leq r$, $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, r\}$, alors les canaux d'entrée $u_{i_1}^*(t), \dots, u_{i_k}^*(t)$ peuvent être supprimés du vecteur d'entrée sans affecter le temps optimal

T^* .

D'autre part, si $b_{i_1} = \dots = b_{i_k}$ sont les colonnes identiques, alors $k-1$ canaux d'entrée peuvent être supprimés sans affecter le temps optimal T^* , même si le problème est singulier où $u_{i_1}^*(t) \neq 0$ durant un intervalle non trivial de temps.

Un concept de réduction d'entrée est introduit comme suit:

Définition 3.3. La réduction des canaux d'entrées signifie qu'il existe des canaux d'entrée, qui peuvent être éliminés du vecteur d'entrée $u(t)$ sans augmenter le temps optimal T^* dans le problème (3.1).

Évidemment, si la matrice d'entrée B possède des colonnes identiques, alors la réduction d'entrée doit pouvoir exister.

Théorème 3.3. *La réduction d'entrée existe si la matrice B possède des colonnes identiques.*

Démonstration

Si la matrice B possède des colonnes identiques c'est à dire $b_i = b_j$, alors selon la formule (3.11), on peut avoir

$$q_i - q_j = \lambda^T(0)e^{-A\zeta}(b_i - b_j) \equiv 0, \forall t \in [0, T]$$

c'est à dire $q_i \equiv q_j$.

Donc dans un problème normale, à la fois $u_i(t)$ et $u_j(t)$ peut être retiré sans affecter le temps optimal.

D'autre part, si le problème est singulier, sans perte de généralité, nous supposons que seul le $q_i(\zeta)$ et $q_j(\zeta)$ atteignent la valeur extrême pendant un intervalle de temps non trivial $[t_1; t_2] \subset [0, T]$, $\zeta \in [t_1, t_2]$, alors

$$\frac{dx^*(\zeta)}{d\zeta} = Ax^*(\zeta) + Bu^*(\zeta) = Ax^*(\zeta) + b_i u_i^*(\zeta) + b_j u_j^*(\zeta)$$

si $b_i = b_j$, l'équation peut s'écrire de la façon suivante

$$\frac{dx^*(\zeta)}{d\zeta} = Ax^*(\zeta) + b_i(u_i^*(\zeta) + u_j^*(\zeta)),$$

ainsi, soit $u_i(t)$ ou $u_j(t)$ peut être supprimé sans augmenter le temps optimal.

Remarque 3.4. Ce théorème indique que l'extension de la matrice d'entrée

B par $B_e = [B, B_1]$ ne réduira pas le moment optimal pour le problème 2.1, où B_1 est constituée par des colonnes de B , c'est à dire en ajoutant des actionneurs redondants, ceux-ci ne peuvent pas améliorer le temps optimal sous la contrainte d'entrée Θ .

Cependant, ce n'est pas le cas pour le problème 2.2 soumis à la contrainte Π .

3.6 Exemples

Exemple 3.1

Considérons la singularité du problème 3.1 avec un système suivant:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

On a $|H_{12}| = 120 \neq 0$, $|H_{13}| = 0$ et $|H_{23}| = 0$, alors le théorème (3.3) ne peut pas être utilisé pour décider si le problème en temps optimal du système (3.13) est normal.

En fait, comme nous le montrer, le problème peut être normal. Selon le PMP, $q(t)$ satisfait

$$q(t) = B^T e^{-A^T t} \lambda(0) = \begin{pmatrix} 10e^{5t} + e^{2t} + e^t \\ 2e^{2t} + 2e^t \\ e^{2t} + e^t \end{pmatrix}$$

avec $\lambda(0) = (1, 1, 1)^T$.

De toute évidence $q_1(t) > q_2(t) > q_3(t)$ pour $t \in [0, +\infty[$.

Selon la définition 3.1, le problème de contrôle en temps optimal est normal, et ainsi, les canaux u_2 et u_3 peut être supprimés sans augmenter le temps optimal.

Exemple 3.2

Considérons le problème 3.1 avec le système suivant:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Pour un état initial $x(0) = (-26.7991, -19.1673)^T$

En appliquant le PMP on obtient

$$H(x(t), \lambda(t), u(t), t) = 1 + \lambda_1(-2x_1 + 2u_1 + u_2) + \lambda_2(-x_2 + u_1 + 3u_2).$$

On a $|H_{12}| = -|H_{21}| = -2 \neq 0$. Selon le théorème 3.3, le problème associé au système (3.14) est normale.

Le vecteur adjoint $\lambda(t)$ vérifie

$$\lambda_1(t) = \lambda_1(0)e^{2t}.$$

$$\lambda_2(t) = \lambda_2(0)e^t.$$

Après la résolution du système en fonction de u_1 et u_2 on obtient

$$x_1(t) = (u_1 + \frac{1}{2}u_2)(1 - e^{-2t}) - 26.7991e^{-2t}$$

$$x_2(t) = (u_1 + 3u_2)(1 - e^{-t}) - 19.1673e^{-t}$$

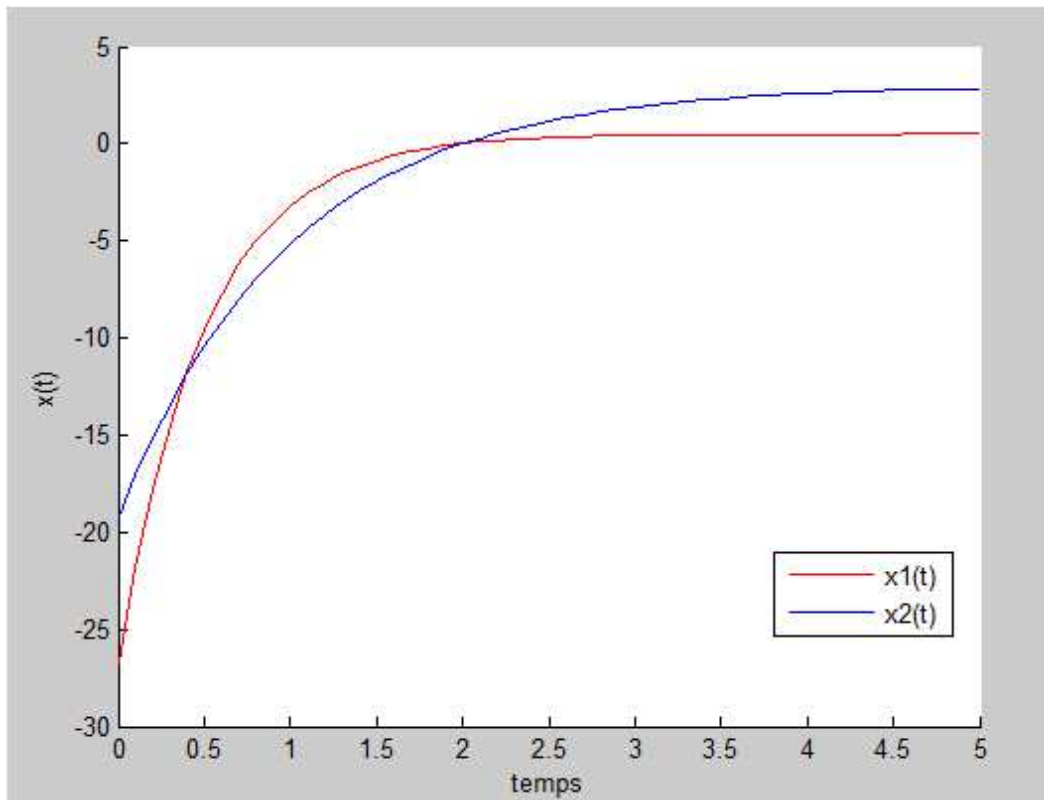


FIG. 3.2 – la trajectoire optimal $x(t)$ mono-entrée avec $u_1 = 0$ retiré du vecteur d'entrée

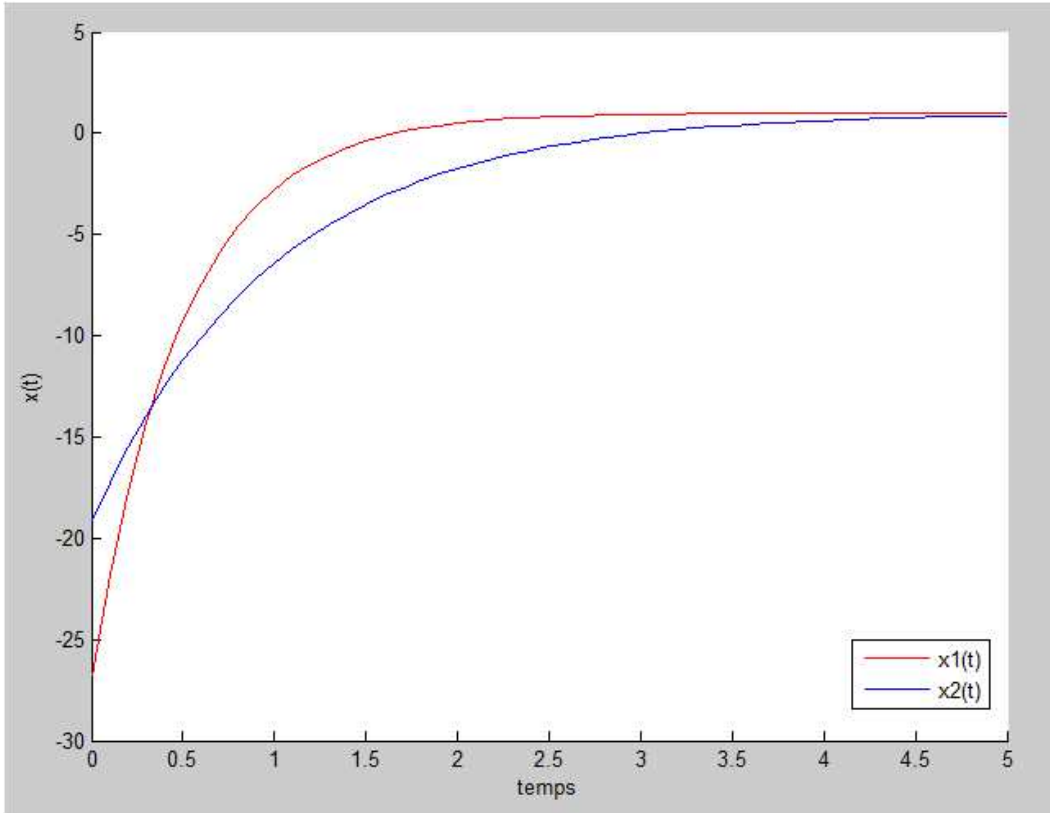


FIG. 3.3 – la trajectoire optimale $x(t)$ avec $u_2 = 0$ retiré du vecteur d'entrée

On remplace $x(t)$ dans H

$$H(\lambda(0), u(t), t) = u_1(2\lambda_1(0) + \lambda_2(0)) + u_2(\lambda_1(0) + 3\lambda_2(0)) - 1 + 53.5982\lambda_1(0) + 19.1673\lambda_2(0)$$

$$\min_{u \in \Theta} H \Leftrightarrow \max_{u \in \Theta} \{u_1(2\lambda_1(0) + \lambda_2(0)) + u_2(\lambda_1(0) + 3\lambda_2(0))\}$$

avec $\lambda(0) = (1, 1)^T$.

Après l'application du PMP on trouve $U^*(t) = (0, 1)$. On atteint l'origine $x(T) = (0, 0)$ à un temps minimale $T = 2$.

On remarque que le contrôle (canal) $u_1 = 0$ sur tout l'intervalle $[0, 2]$ est inactif, donc il peut être retiré du vecteur d'entrée sans augmenter le temps optimal $T^* = 2$. C'est-à-dire le système (3.12) est équivalent au système suivant:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} u_2 \quad (3.15)$$

Exemple 3.3

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

avec l'état initial $x(0) = (2, -2)$.

$$H(x(t), \lambda(t), u(t), t) = \lambda_1 x(t) + \lambda_2(t)(u_1(t) + u_2(t))$$

avec $\begin{cases} \lambda_1(t) = \lambda_1(0), \\ \lambda_2(t) = \lambda_1(0)t. \end{cases}$

$$\max_u H \Leftrightarrow \max_{u \in \Theta} \{ \lambda_1(0)(u_1 + u_2) \}$$

La résolution du problème avec la contrainte Θ

Alors $(u_1^*, u_2^*) = (1, 0)$

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + x_2(0)t + x_1(0), \\ x_2(t) = t + x_2(0), \end{cases} .$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 2, \\ x_2(t) = t - 2, \end{cases}$$

le temps optimal est $T^* = 2$.

Donc la résolution du système (3.16) est équivalent à la résolution du système suivant:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (3.17)$$

La résolution du problème avec la contrainte Π

$$\max_{u \in \Pi} H \Leftrightarrow \max_{u \in \Pi} \{\lambda_1(0)(u_1 + u_2)\}$$

a) pour $t \in [0, -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}]$ alors $(u_1^*, u_2^*) = (-1, -1)$

$$\begin{cases} x_1(t) = -t^2 - 2t + 2, & ; \\ x_2(t) = -2t - 2, & . \end{cases}$$

b) pour $t \in [-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, T]$ alors $(u_1^*, u_2^*) = (1, 1)$

$$\begin{cases} x_1(t) = t^2 + (2 - 2\sqrt{6})t + 7 - 2\sqrt{6}, \\ x_2(t) = 2t + 2 - 2\sqrt{6}, \end{cases}$$

avec le temps optimal $T^* = -2 + \sqrt{6}$

D'après le théorème 3.3, avec la contrainte l'entrée Θ l'ajout de colonnes identiques à la matrice B n'affectera pas le temps minimum T^* . Par contre, l'ajout des entrées identiques redondants dans un problème de contrôle en temps optimal avec la contrainte d'entrée Π réduira le temps optimal T^* .

3.7 Conclusion

Dans ce que nous avons présenté dans ce chapitre, plusieurs propriétés particulières du problème de contrôle en temps optimal avec une classe interdépendante sur la contrainte d'entrée Θ ont été étudiées. Après avoir redéfini la singularité du problème avec la contrainte d'entrée Θ la commande optimal devient une commande dynamique à entrée unique. Ensuite, nous avons introduit un nouveau concept de réduction d'entrée, dans lequel les canaux inactifs et redondants peuvent être supprimés du vecteur d'entrée sans augmenter le temps optimal T^* . Enfin, certains exemples numériques sont étudiés pour illustrer les principaux résultats.

Conclusion

Notre but dans ce mémoire est l'étude d'un problème de contrôle en temps optimal avec une classe de commandes a contraintes interdépendantes.

En premier lieu, nous avons fait quelques rappels sur les équations différentielles car elle jouent un rôle important dans l'étude des applications intervenant dans le domaine de la physique, de la chimie, de l'économie...etc. Elles interviennent lors de la détermination de lois de commande optimale des procédés gouvernés par des systèmes dynamiques.

Ensuite nous nous sommes intéressés à l'étude d'une méthode de résolution des problèmes de contrôle optimal. Cette méthode, qui est à la fois précise et rapide, fait partie des méthodes dites indirectes. Elle est basée sur le principe du maximum de Pontryaguin. Ce principe permet d'établir une formulation Hamiltonienne directe pour calculer les extrémales d'un problème de minimisation.

La dernière partie est consacrée à l'étude d'un cas spécifique de problème de contrôle en temps optimal sur une classe interdépendante sur les contraintes d'entrée. Après la définition de la singularité du problème avec la contrainte d'entrée Θ , le contrôle en temps optimal devient un contrôle dynamique avec une mono-entrée. Ensuite, nous avons introduit un nouveau concept de réduction d'entrée, dans lequel les canaux inactifs et redondants peuvent être éliminés du vecteur d'entrée sans augmenter le temps optimal T . Enfin, certains exemples numériques sont étudiés pour illustrer les principaux résultats.

Bibliographie

- [1] A.Munnier.Theorie des équations differentielles ordinaires,2006/2007
Tazga Minimisation de la consommation d'énergie d'un v´ehicule
électrique,14/06/2011. \surd
- [2] Mme.K .Louadj ,Résolution de problèmes paramètres de controle opti-
mal,09/05/2012.
- [3] M.Merakeb,optimisation multicritère en control optimal. Application
véhicule électrique,14/06/2011.
- [4] Trélat.Emmanuel trélat,note du cours A08 2007,2008.
- [5] Bounnard b,Faubourgl,trélat E mécanique céleste et control des
véhicules spatiaux,may 5,2005.
- [6] A classe of dependent input constraints in time optimal control pro-
blems.