

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique**  
**Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou**



**Faculté des sciences**

**Département de  
Mathématiques**



**Mémoire de Master**

**Filière : Mathématique.**

**Spécialité : Recherche Opérationnelle.**

**THEME**

**PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE STOCHASTIQUE  
ET APPLICATION**

**Présenté par :**

*Mr Bellebia Mehdi*

*M<sup>elle</sup> Loudahi Lamia*

**Encadré par :**

*Mr Chebbah Mohamed*

**Année universitaire : 2017 / 2018**

# ***Remerciements***

***Nous remercions avant tout << DIEU >> le tout puissant de nous avoir donné la force, la santé et le courage pour effectuer ce projet de fin d'étude, dans les meilleurs conditions.***

***Nous tenons à remercier notre promoteur, Mr CHEBBAH, qui nous a encadrés pendant notre travail, et nous tenons aussi à lui exprimer notre profonde reconnaissance pour son très bon encadrement.***

***Nos remerciements vont également aux étudiants RO, pour leur grand soutien.***

***Sans oublier d'exprimer notre reconnaissance et gratitude à tous nos enseignants durant notre cursus au département Mathématiques.***

***Nous tenons à remercier très sincèrement l'ensemble des membres du jury qui nous font le grand honneur d'avoir accepté de juger notre travail.***

## Dédicaces

J'ai l'immense plaisir de dédier ce modeste travail

A

Mes chères parents AHMED et KHOKHA

Mes frères HAKIM, AMINE, HILLAL

Ma sœur SOUHILA et son mari HASSANE

Mes nièces NADINE et MIHADE

Sans oublier mes chers: IDIR, MEHDI, LAMINE, GHILES, RADIA,  
LILA, FRIEL, DJIDJI, RACHIDA, HAYET, DYHIA et bien sur  
tous les étudiants RO de ma promotion 2017/2018.

LAMIA

## **Dédicaces**

J'ai l'immense plaisir de dédier ce modeste travail

A

Mes chères parents MESSAOUD et DJAMILA

Mes sœurs adorables : MERIEM et DYHIA

Mon petit frère : MOUMOUH

Et sans oublier tous mes amis et les étudiants RG de la  
promotion 2017/2018.

MEHDI

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>4</b>
<b>1 Les variables aléatoires</b>	<b>6</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Variable aléatoire . . . . .	6
1.2.1 Définition . . . . .	6
1.2.2 Notation . . . . .	6
1.3 Loi de probabilité, fonction de répartition, densité de probabilité . . . . .	7
1.3.1 Loi de probabilité . . . . .	7
1.3.1.1 Variable aléatoire finie . . . . .	7
1.3.1.2 Variable aléatoire dénombrable . . . . .	7
1.3.1.3 Variable aléatoire continue . . . . .	8
1.3.2 Fonction de répartition . . . . .	8
1.3.3 Densité de probabilité . . . . .	8
1.4 Espérance mathématique et moments . . . . .	9
1.4.1 variable aléatoire finie . . . . .	9
1.4.2 variable aléatoire dénombrable . . . . .	10
1.4.3 Variable aléatoire absolument continue . . . . .	10
1.4.4 moments d'une variable aléatoire . . . . .	11
1.5 Propriétés . . . . .	12
1.5.1 Propriétés de l'espérance . . . . .	12
1.5.2 Propriétés de la variance . . . . .	12
1.5.3 Propriétés de la covariance . . . . .	12
1.6 Lois de probabilité . . . . .	12
1.6.1 La loi normale . . . . .	13
1.6.2 La loi uniforme . . . . .	14
1.7 La matrice de covariance et variance-covariance . . . . .	14
<b>2 La programmation linéaire</b>	<b>16</b>
2.1 Introduction à la programmation linéaire . . . . .	16
2.2 Méthodes de résolution d'un programme linéaire . . . . .	17
2.2.1 Méthode du simplexe . . . . .	17
2.2.1.1 Problème standard et solution de base . . . . .	18
2.2.1.2 Critère d'optimalité . . . . .	19
2.2.1.3 Algorithme du simplexe . . . . .	19
<b>Exemple</b>	<b>20</b>
2.3 La programmation linéaire multi-objectif . . . . .	22
2.3.1 Introduction . . . . .	22
2.3.2 Concepts de base . . . . .	22
2.3.3 Efficacité . . . . .	23

2.3.3.1	Pareto optimale . . . . .	23
2.3.3.2	Efficacité faible . . . . .	23
2.3.3.3	Le point idéal . . . . .	24
2.3.3.4	Point anti-idéal . . . . .	24
2.3.3.5	Vecteur de référence . . . . .	24
2.3.3.6	Front Pareto . . . . .	24
2.3.4	Dominance . . . . .	24
2.3.4.1	Dominance forte . . . . .	25
2.3.4.2	Dominance faible . . . . .	25
2.3.4.3	Non-dominance . . . . .	25
2.3.4.4	Dominance au sens Geoffrion . . . . .	25
<b>Exemple</b>		<b>26</b>
2.3.4.5	Convexité . . . . .	27
2.3.5	Test d'efficacité d'une solution . . . . .	27
2.3.6	Méthode du simplexe multicritère . . . . .	29
<b>3</b>	<b>programmation linéaire stochastique</b>	<b>32</b>
3.1	Introduction . . . . .	32
3.2	Les différentes approches . . . . .	33
3.2.1	Approche passive ou "wait and see" . . . . .	33
3.2.2	Approche active ou "here and now" . . . . .	33
3.3	Critère d'optimisation du problème équivalent . . . . .	33
3.3.1	Cas des objectifs aléatoires . . . . .	33
3.3.1.1	Le critère de l'espérance mathématique (E-modèle) ou <i>critère de bayes.</i> . . . . .	33
3.3.1.2	Le critère de la variance (V-modèle) . . . . .	34
3.3.1.3	Le critère espérance-variance (E-V modèle) . . . . .	34
3.3.1.4	Le critère de risque minimal (P-modèle) . . . . .	34
3.3.1.5	Le critère de Katoka . . . . .	35
3.3.2	Cas de contraintes aléatoires . . . . .	35
<b>Exemple</b>		<b>36</b>
3.3.2.1	Modèles avec seuil de probabilités sur les contraintes ("chance constrained programming") . . . . .	37
3.3.2.2	Modèle avec recours . . . . .	39
<b>Exemple</b>		<b>41</b>
3.4	Programmation linéaire multi objectif stochastique . . . . .	43
3.4.1	Programme du risque minimale multiple . . . . .	43
3.4.2	Programmation d'objectifs stochastiques (Stochastic goal program- ming) . . . . .	45
<b>4</b>	<b>La programmation mathématique</b>	<b>47</b>
4.1	Introduction . . . . .	47
4.2	Notions de base . . . . .	48
4.3	Classification d'un programme mathématique . . . . .	49
4.4	Qualification des contraintes . . . . .	49
4.5	Existence et unicité de la solution . . . . .	50
4.6	Conditions d'optimalité :(cas sans contraintes) . . . . .	50
4.6.1	Condition nécessaire du 1 <sup>er</sup> ordre : (cas sans contraintes) . . . . .	50

4.6.2	Condition nécessaire du 2 <sup>ème</sup> ordre . . . . .	51
4.6.3	Conditions suffisantes du 2 <sup>ème</sup> ordre . . . . .	51
4.6.4	Condition suffisantes d'optimalité globale . . . . .	51
4.7	Conditions d'optimalité : (avec contraintes) . . . . .	51
4.7.1	Condition nécessaire du 1 <sup>ère</sup> ordre (avec contrainte) . . . . .	52
4.7.2	Conditions nécessaires du 2 <sup>ème</sup> ordre . . . . .	52
4.7.3	Conditions suffisantes du 2 <sup>ème</sup> ordre . . . . .	53
4.8	Programmation non linéaire stochastique . . . . .	53
4.9	Méthode de A.Cambini . . . . .	54
4.9.1	Algorithme . . . . .	54
<b>Exemple 1</b>		<b>55</b>
<b>Exemple 2</b>		<b>56</b>
<b>5</b>	<b>Programmation sur Lingo</b>	<b>57</b>
5.1	Définition du logiciel Lingo . . . . .	57
5.2	Introduction . . . . .	57
5.3	Installation du logiciel . . . . .	57
<b>Application 1</b>		<b>58</b>
<b>Application 2</b>		<b>59</b>
<b>Application 3</b>		<b>60</b>
<b>Application 4</b>		<b>61</b>
<b>Application 5</b>		<b>62</b>
<b>Application 6</b>		<b>63</b>
<b>Application 7</b>		<b>64</b>
<b>Application 8</b>		<b>65</b>
<b>Application 9</b>		<b>66</b>
<b>Conclusion générale</b>		<b>67</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>68</b>

## Introduction générale

La Recherche Opérationnelle est un ensemble de méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche de la meilleure façon d'opérer des choix en vue d'aboutir au résultat visé ou au meilleur résultat possible. Dans tous les domaines de la Recherche Opérationnelle, l'obtention des données précises traitées est évidemment essentielle. Dans de nombreuses situations cependant, les données ou certaines d'entre elles dépendent de paramètres extérieurs non maîtrisables (niveau de croissance, prix du pétrole, taux d'inflation, degré de pluviométrie,...etc).

L'approche la plus classique est celle qui suppose l'incertitude de nature aléatoire (des statistiques antérieures, diverses expertises) permettant de modéliser les coefficients du modèle comme des variables aléatoires.

Lors de la modélisation ou la formulation mathématique d'une expérience d'optimisation ou de décision qui se ramène à un programme mathématique, on a tendance à supposer que les données sont déterministes. Cette hypothèse est peu réaliste compte tenu du fait que ces dernières peuvent être imprécises avec une imprécision de nature aléatoire. C'est ce qui a motivé l'introduction de la **Programmation Mathématique Stochastique**, c'est ce que nous allons traiter dans la suite de notre travail, mais on s'intéresse entre autre au cas linéaire.

La **Programmation Linéaire Stochastique** a connu plusieurs développements et a donné lieu à de très nombreux ouvrages (Kall 1976, Wets 1983) Il est important de noter qu'un problème mathématique stochastique sera mal posé du point de vue mathématique et qu'il sera donc essentiel de lui donner un sens en lui associant un problème déterministe (bien posé) équivalent, qu'on résoudra avec plusieurs méthodes. Dans notre travail, On s'intéresse aux problèmes mathématiques en environnement aléatoire.

Notre travail se résume comme suit :

Dans le premier chapitre, nous avons défini et rappelé quelques notions sur les variables aléatoires (discrètes et continues) et leurs propriétés (la loi de distribution, la fonction de densité, fonction de répartition, espérance mathématique, variance, covariance, écart type, et la matrice de covariance ).

Ensuite le deuxième chapitre est réservé à la présentation de la programmation linéaire **mono – objectif** et **multi – objectif**, dans la première partie de ce chapitre on a traité le cas **mono – objectif**, et on a utilisé les méthodes du simplexe pour la résolution d'un problème de programmation linéaire, et on a terminé cette partie par un exemple. Dans la deuxième partie on a traité le cas **multi – objectif**, dont on a cité la dominance et l'efficacité d'une solution, la résolution par méthode du simplexe.



Le troisième chapitre est partagé en deux parties, la *programmation linéaire stochastique mono objectif* et la *programmation linéaire stochastique multi – objectif*. Dans la première partie on a défini un problème linéaire stochastique mono-objectif et on a cité deux approches (**Passive et active**) de résolution de ce dernier et quelques critères d'optimisation du problème équivalent lorsque l'objectif est aléatoire (E-modèle, V-modèle, EV-modèle, P-modèle, katoka). Quelques modèles lorsque les contraintes sont aléatoires (Seuil de probabilités sur les contraintes, recours général, fixe, et fixe simple) et deux exemples. Dans la deuxième partie de ce chapitre on a étudié le cas d'un programme linéaire multi-objectif stochastique, dont on a cité le programme du risque minimal multiple, et stochastique goal programming.

Dans le quatrième chapitre on a parlé de la programmation mathématique (cas non linéaire), on a défini quelques notions de base, la classification d'un programme mathématique, qualification des contraintes, l'existence et l'unicité d'une solution, et on a cité les conditions d'optimalité de 1<sup>ere</sup> et 2<sup>eme</sup> ordre pour les cas *avec contraintes* et *sans contraintes*, et pour la programmation non linéaire stochastique nous avons donné deux modèles ; l'un est fractionnaire, il se résout par l'algorithme de A.Cambini, et l'autre fait appel à une optimisation globale ce qui engendre la complexité de résolution de ce dernier, et enfin nous avons terminé ce chapitre par la résolution de deux problèmes stochastiques non linéaires.

Le cinquième chapitre se base sur le côté de programmation par le logiciel Lingo.

# Chapitre 1

## Les variables aléatoires

### 1.1 Introduction

Il est fréquent que l'on associe une valeur numérique à tout résultat d'une expérience aléatoire. La notion de *variable aléatoire* est la formalisation mathématique de cette situation.

### 1.2 Variable aléatoire

#### 1.2.1 Définition

Soit  $S$  un ensemble fondamental associé à une épreuve  $A$ . On appelle *variable aléatoire* toute application  $X$  définie sur un ensemble fondamental  $S$  à valeurs numériques.

#### 1.2.2 Notation

Si  $X$  est une variable aléatoire définie sur un ensemble fondamental  $S$  relatif à une épreuve  $A$ , et si  $a$  est un nombre réel, on pose [6] :

$$(X = a) = \{r \in S / X(r) = a\}$$

C'est à dire que  $(X = a)$  est l'ensemble des résultats de l'épreuve  $A$  aux quels l'application  $X$  associe la valeur  $a$ .

De même :

$$(X \leq a) = \{r \in S / X(r) \leq a\}$$

On définirait de même  $(a \leq X \leq b)$ ,  $(X < a)$ , ... etc.

Si  $E$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , on pose :

$$(X \in E) = \{r \in S / X(r) \in E\}$$

## 1.3 Loi de probabilité, fonction de répartition, densité de probabilité

### 1.3.1 Loi de probabilité

#### Définition [6]

On appelle *loi de probabilité* d'une variable aléatoire  $X$  définie sur un ensemble fondamental  $S$ , la donnée des probabilités  $P(X \in E)$  pour tout intervalle  $E$  de  $\mathbb{R}$ .

Plusieurs cas se présentent, suivant que l'ensemble  $X(S)$  des valeurs prises par la variable aléatoire  $X$  est fini, dénombrable ou continu.

#### 1.3.1.1 Variable aléatoire finie

$$X(S) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

La loi de probabilité de  $X$  est entièrement déterminée par la donnée des  $P_i = P(X = x_i)$  pour  $i = \overline{1, n}$ . On a :

$$\forall i = \overline{1, n}, P_i \geq 0$$
$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

#### 1.3.1.2 Variable aléatoire dénombrable

$$X(S) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

Comme précédemment la loi de probabilité de  $X$  est entièrement déterminée par la donnée des  $P_i = P(X = x_i)$  pour  $i \in N^*$ . On a :

$$\forall i \in N^*, P_i \geq 0$$
$$\sum_{i=1}^{+\infty} P_i = 1$$

### Remarque :

Si  $X(S)$  est finie ou dénombrable,  $X$  est dite *discrète*.

#### 1.3.1.3 Variable aléatoire continue

$X$  est dite continue si  $X(S)$  est une réunion d'intervalles de  $\mathbb{R}$ .

Pour tout nombre  $x$ , on a  $P(X = x) = 0$

On détermine la loi de probabilité de  $X$  par la donnée des probabilités  $P(X \leq x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

#### 1.3.2 Fonction de répartition

**Définition** [6]

Si  $X$  est une variable aléatoire définie sur un ensemble fondamental  $S$ , on appelle *Fonction de répartition* de  $X$  l'application  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leq x)$$

#### 1.3.3 Densité de probabilité

**Définition** [6]

Si la fonction de répartition  $F$  d'une variable aléatoire continue  $X$  est dérivable en tout point  $x \in \mathbb{R}$ , de dérivée  $f(x)$ , sauf peut-être en un nombre fini de points, et si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

On dit que  $X$  est une *variable aléatoire absolument continue*.  $f$  est appelée *la densité de probabilité* (ou encore *fonction de distribution*) de  $X$ .

**Remarques** : [6]

1) Si  $X$  est une variable aléatoire absolument continue de densité de probabilité  $f$ , on a :

$$\bullet \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, a \leq b, P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0$$

2) Si  $X$  est une variable aléatoire finie ou dénombrable ( $X(S) = \{x_1, x_2, \dots\}$ ) la fonction de répartition  $F$  de  $x$  détermine encore la loi de probabilité de  $X$  et on a :

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{i=\alpha}^{\beta} P(X = x_i), \text{ si } x_{\alpha-1} < a \leq x_{\alpha} \text{ et } x_{\beta-1} < b \leq x_{\beta}$$

Dans ce cas :

$$F(x) = \sum_{i=1}^k P(X = x_i), \text{ si } x_k \leq x \leq x_{k+1}$$

Et  $F$  est une fonction en escalier .

## 1.4 Espérance mathématique et moments

La notion de variable aléatoire est la transposition probabiliste de la notion statistique de caractère. Au lieu de distribution de fréquence, on parle de loi de probabilités d'une variable aléatoire.

Les lois de variables aléatoires se représentent comme les distributions de fréquence. Elles s'analysent de la même manière, au moyen de paramètres de position ou dispersion, ou de moments,...etc.

### 1.4.1 variable aléatoire finie

**Définition** [6]

Soit  $X$  une variable aléatoire finie sur un ensemble fondamental  $S$ .

Si  $X(S) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  on appelle *espérance mathématique* , ou moyenne de  $X$  le nombre :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

## 1.4.2 variable aléatoire dénombrable

### Définition [6]

Soit  $X$  une variable aléatoire dénombrable sur un ensemble fondamental  $S$ .

$X(S) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ . On appelle *espérance mathématique* de  $X$  la somme de la série  $(x_i P(X = x_i))_{i \in \mathbb{N}^*}$

si cette série est *absolument convergente*, c'est à dire

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(X = x_i) < +\infty$$

dans ce cas :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$$

cela assure que la valeur de  $E(X)$  ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a numéroté les éléments de  $X(S)$ .

Si l'on avait seulement  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) < +\infty$ , on montre que l'on pourrait donner n'importe quelle valeur à  $E(X)$  en changeant la numérotation des éléments de  $X(S)$ .

## 1.4.3 Variable aléatoire absolument continue

### Définition [6]

Si  $X$  est une variable aléatoire absolument continue de densité de probabilité  $f$ , on appelle *espérance mathématique* de  $X$  le nombre :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

lorsque l'intégrale est convergente.

#### 1.4.4 moments d'une variable aléatoire

On appelle *moment d'ordre*  $k$  tel que  $k \in \mathbb{N}^*$ , d'une variable aléatoire  $X$ , le nombre  $m_k$  définit par :

$$m_k = E(X^k).$$

on appelle *moments centré d'ordre*  $k$  de  $X$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , le nombre  $\mu_k$  défini par :

$$\mu_k = E[(X - E(X))^k]$$

le moments centré d'ordre 2 est la *variance* de  $X$  :

$$V(X) = \mu_2 = E[(X - E(X))^2]$$

et on a aussi :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

la racine carrée de la variance est *l'écart -type* :

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

#### **Covariance :**

On appelle covariance de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , notée  $Cov(X, Y)$ , le nombre réel suivant :

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

## 1.5 Propriétés

### 1.5.1 Propriétés de l'espérance

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même  $\Omega$  (univers) admettant une espérance mathématique, alors :

$$-E(X * Y) = E(X) * E(Y) \text{ si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendants}$$

$$-E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$-E(aX) = a E(X) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$-E(b) = b \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

$$-\text{Si } X \geq 0 \text{ alors } E(X) \geq 0$$

### 1.5.2 Propriétés de la variance

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même  $\Omega$  (univers) admettant une espérance mathématique, alors :

$$-V(X + Y) = V(X) + V(Y) \text{ si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}$$

$$-V(aX) = a^2 V(X) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$-V(X + b) = V(X) \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

$$-V(b) = 0 \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

### 1.5.3 Propriétés de la covariance

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même  $\Omega$  admettant une espérance mathématique, alors :

$$-Cov(X, Y) = 0 \text{ si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}$$

$$-V(aX + bY) = a^2 V(X) + 2ab Cov(X, Y) + b^2 V(Y)$$

## 1.6 Lois de probabilité



## 1.6.1 La loi normale

**Définition** [6]

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle absolument continue.

On dit que  $X$  suit une *Loi normale* ou de *Laplace – Gauss* si la densité de probabilité est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

Où :

$e$  : est la base des logarithmes népériens.

$m$  et  $\sigma$  sont constantes avec  $\sigma > 0$ . Cette loi est à deux paramètres  $m$  et  $\sigma$ , notée  $N(m, \sigma)$ .

$$m = E(X);$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)}.$$

**Remarque** : [6]

$f$  est la densité de probabilité. En effet :

a)-  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$  car  $\sigma > 0$ .

b)-  $S = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

Par un changement de variable  $t = \frac{x-m}{\sigma}$ , en passant par les coordonnées polaires :

$$S = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

### La loi normale centrée réduite

En effectuant le changement de variable  $t = \frac{x-m}{\sigma}$ .

Soit  $T$  une variable aléatoire absolument continue suivant  $N(0, 1)$ . Sa densité de probabilité est donnée par  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

La fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$  de densité  $f$ .

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

## 1.6.2 La loi uniforme

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur un intervalle  $[a, b]$ .

Sa fonction de densité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et sa fonction de répartition définie par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Sa variance est :

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

## 1.7 La matrice de covariance et variance-covariance

### Définition

Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$  un vecteur aléatoire, et  $x_i$  variable aléatoire, la matrice **covariance** de  $X$  est une matrice carrée notée  $V$ , dont son terme générique est donné par :

$$a_{ij} = \begin{cases} cov(x_i, x_j) & \text{si } i \neq j \\ v(x_i) & \text{si } i = j \end{cases} \quad i = \overline{1, p}; j = \overline{1, p}$$

$V$  est définie comme suit :

$$V = \begin{pmatrix} v(x_1) & \text{cov}(x_1, x_2) & \dots & \text{cov}(x_1, x_p) \\ \text{cov}(x_2, x_1) & v(x_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(x_p, x_1) & \dots & \dots & v(x_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1x_2} & \dots & \sigma_{x_1x_p} \\ \sigma_{x_2x_1} & \ddots & \ddots & \dots \\ \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_px_1} & \dots & \dots & \sigma_{x_p}^2 \end{pmatrix}$$

# Chapitre 2

## La programmation linéaire

### Cas mono-objectif

#### 2.1 Introduction à la programmation linéaire

Un problème de programmation linéaire consiste à minimiser ou à maximiser une fonction linéaire sous contraintes linéaires.

Tout problème de programmation linéaire peut se formuler de la manière suivante :

Trouver les valeurs des variables  $x = (x_j / j = \overline{1, n})$  qui maximisent ou minimisent la fonction objectif suivante : [2]

$$\begin{aligned} Z(x) &= Z(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n \\ &= \sum_{j=1}^n c_jx_j \longrightarrow \max(\min) \end{aligned} \quad (1).$$

Sous les contraintes suivantes :

$$(P_1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

$c_j$  où  $j \in \{1, \dots, n\}$  représente les couts des différents produits ( les coefficients  $c_j$  ).

$a_{ij}$  ( $i = \overline{1, m}$ ;  $j = \overline{1, n}$ ) sont supposés être des nombres réels, en plus on considère que l'entier  $m$  est inférieur ou égal à  $n$ .

Les nombres  $b_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) sont tous positifs ou nuls et le rang du système (2) est inférieur ou égal à  $m$ .

### Définition 1

- La fonction  $Z$  est appelée la fonction objectif.
- Les contraintes (2) sont appelées les contraintes principales.
- Les contraintes (3) sont dites contraintes directes.

### Remarque 1

Si l'objectif consiste à minimiser une fonction linéaire  $Z$  telle que  $Z(x) = Z(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n$  alors on maximisera la fonction linéaire opposée :  $\bar{Z}$  telle que  $\bar{Z}(x) = -Z(x_1, x_2, \dots, x_n) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_jx_j - \dots - c_nx_n$ .

## 2.2 Méthodes de résolution d'un programme linéaire

Les méthodes exactes sont utilisées dans la recherche opérationnelle afin de trouver une solution ou des solutions optimales éventuelles pour les problèmes de programmation linéaire, et parmi ces méthodes on s'intéresse à la méthode du simplexe.

### 2.2.1 Méthode du simplexe

La méthode du simplexe est une méthode itérative. Elle démarre d'un point extrême (point de départ) et passe au sommet voisin, et ceci constitue une itération de l'algorithme du simplexe. Pour cela, on doit définir le point extrême de départ et le test d'arrêt par rapport au critère d'optimalité.

Soit  $(P_1)$  le problème standard de programmation linéaire avec une maximisation,  $(P_1)$  peut s'écrire sous la forme matricielle suivante [2] :

$$\{c'x \rightarrow \max; \quad Ax = b; \quad x \geq 0\}.$$

Où

$I = \{1, 2, \dots, m\}$  est l'ensemble des indices de lignes de  $A$ .

$J = \{1, 2, \dots, n\}$  est l'ensemble des indices de colonnes de  $A$ .

- $A = A(I, J)$  est la matrice des conditions ; avec :

- $a_j = A(I, j)$  les colonnes de  $A$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$
- $c' = c'(J)$  est le vecteur des coûts;
- $b = b(I)$  est le vecteur des contraintes (second membre);
- $x = x(J) = (x_j / j \in J)$  est le vecteur des variables;

### 2.2.1.1 Problème standard et solution de base

#### Définition 1 [2]

Tout vecteur  $x$  vérifiant les contraintes (2) et (3) de  $(P_1)$  est appelé solution réalisable (solution admissible) du problème (1) – (2) – (3) .

#### Définition 2[2]

Une solution réalisable  $x$  est dite de base si  $(n - m)$  des composantes sont nulles. Aux autres  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$  correspondent  $m$  vecteurs  $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m}$  de la matrice de condition  $A$  linéairement indépendants. L'ensemble  $J_B = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$  est appelé ensembles des indices de base.

$J_H = J \setminus J_B$  ensemble des indices hors base.

Autrement :

La solution réalisable  $x = x(J)$  est solution de base si  $x_H = x(J_H) = 0$ ;  $\det A_B \neq 0$ ; où  $A_B = A(I, J_B)$ ;  $x(J_B) \geq 0$

La matrice  $A_B$  est appelée matrice de base;  $x(J_B)$  sont les composantes de base;  $x(J_H)$  sont les composantes hors base.

#### Définition 3 [2]

Une solution réalisable  $x^\circ$  de base est optimale si  $c'x^\circ = \max(c'x)$ , pour toute solution réalisable  $x$ .

#### Définition 4 [2]

Une solution réalisable de base  $x$  est dite non dégénérée si  $x_j > 0$ ,  $j \in J_B$ .

L'accroissement de la fonctionnelle de la fonction objectif  $Z$  est égale à :

$\Delta Z = Z(\bar{x}) - Z(x) = c'\bar{x} - c'x = c'\Delta x$ , (tels que  $x$  est une solution de base de départ réalisable et non dégénérée). Construisons le  $m$ -vecteur  $y = y(I)$  des potentiels :

$y' = c'_B A_B^{-1}$  et le vecteur  $\Delta = \Delta(J) = (\Delta_j, j \in J)$ , dit vecteur des estimations :

$$\{\Delta' = y'A - c', \Delta_j = y'a_j - c'_j, \quad j \in J\}$$

### 2.2.1.2 Critère d'optimalité

Soit  $\{x, A_B\}$  une solution réalisable de base de départ. L'inégalité  $\Delta_H = \Delta(J_H) \geq 0$  est suffisante et dans le cas de non dégénérescence elle est nécessaire pour l'optimalité de  $\{x, A_B\}$ .

### 2.2.1.3 Algorithme du simplexe

Soit  $\{x, A_B\}$  une solution réalisable de base de départ et supposons que le critère d'optimalité  $\Delta_j \geq 0, j \in J_H$  n'est pas vérifié.

Choisissons l'indice  $j_0 \in J/\Delta_{j_0} = \min(\Delta_j/\Delta_j < 0, j \in J_H)$ .

Le but de l'itération est de faire rentrer cet indice  $j_0$  dans la base. Donc il faut trouver un indice  $j_1 \in J_B$ , qui sortira de la base. Ceci constitue l'itération qui procède au passage de la solution de base (point extrême)  $\{x, A_B\}$  à la solution  $\{\bar{x}, \bar{A}_B\}$  tel que  $z(\bar{x}) \geq z(x)$ .

La nouvelle solution de base  $\bar{x}$  sera trouvée de la manière suivante :

$\bar{x} = x + \theta l$ , où  $l$  est la direction du changement de  $x$  et  $\theta$  le pas le long de cette direction.

Construisons la direction  $l$  de la manière suivante :

sur  $J_H$ , posons :

$$l_j = \begin{cases} 0, & j \in J_H \setminus j_0 \\ 1, & j = j_0 \end{cases}$$

Sur  $J_B$  :  $\bar{x}$  doit être réalisable, donc elle doit vérifier  $A\bar{x} = b$  et comme  $Ax = b$  c'est à dire  $Al = 0$ .

De cette dernière relation on obtient :

$$l_B = l(J_B) = -A_B^{-1}A_H l_H$$

De là  $\bar{x}_H = x_H + \theta l_H = \theta l_H \geq 0$  et  $\bar{x}_B = x_B + \theta l_B \Rightarrow \bar{x}_j = x_j - \theta A_B^{-1}a_{j_0}$  si les composantes du vecteur  $A_B^{-1}a_{j_0} \leq 0$ , alors  $\bar{x}_j \geq 0, \forall \theta \geq 0$ , donc on peut prendre  $\theta = \infty$  et on aura une solution infinie ;

Si non, Parmi les composantes du vecteur  $A_B^{-1}a_{j_0}$ , ils existent celles qui sont positives

Pour avoir  $\bar{x}_B \geq 0$ , il faut prendre un pas maximal  $\theta^0$  :

$\theta^0 = \min \theta_j, (j \in J_B) \quad \theta_j = \min \left\{ \frac{x_j}{x_{j_0}} / x_{j_0} > 0, j \in J_B \right\} = \theta_{j_1}, j_1 \in J_B$ , où  $x_{j_0 j}$  est de la  $j^{\text{ème}}$  composante de  $A_B^{-1}a_{j_0}$

La nouvelle base sera :

$$\bar{J}_B = (J_B \setminus j_0) \cup j_1 \text{ et } \bar{A}_B = (A_B \setminus a_{j_0}) \cup a_{j_1}.$$

### Tableau du simplexe

les différents calculs qu'on aura à effectuer et les différentes étapes de résolution seront disposés dans le tableau suivant :

$c$			$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_m$	$c_{m+1}$	$\dots$	$c_j$	$\dots$	$c_n$	
$c_B$	base	$b$	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$a_m$	$a_{m+1}$	$\dots$	$a_j$	$\dots$	$a_n$	$\theta_j$
$c_1$	$a_1$	$b_1 = x_1$	1	0	$\dots$	0	$x_{1,m+1}$	$\dots$	$x_{1j}$	$\dots$	$x_{1n}$	$\theta_1$
$c_2$	$a_2$	$b_2 = x_2$	0	1	$\dots$	0	$x_{2,m+1}$	$\dots$	$x_{2j}$	$\dots$	$x_{2n}$	$\theta_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_m$	$a_m$	$b_m = x_m$	0	0	$\dots$	1	$x_{m,m+1}$	$\dots$	$x_{mj}$	$\dots$	$x_{mn}$	$\theta_m$
$z$		$\Delta$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\dots$	$\Delta_m$	$\Delta_{m+1}$	$\dots$	$\Delta_j$	$\dots$	$\Delta_n$	

### Exemple et résolution avec l'algorithme du simplexe

Soit le problème de programmation linéaire suivant :

$$(PL_1) \begin{cases} \max & z = x_1 + 2x_2 \\ -3x_1 + & 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + & 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + & x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (\text{forme canonique})$$

on ajoute les variables d'écart pour  $(PL_1)$  afin d'obtenir la forme standard suivante :

$$(PL_2) \begin{cases} \max & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{sous} & \text{les contraintes :} \\ -3x_1 + & 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + & 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + & x_2 + x_5 = 5 \\ x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (\text{forme standard})$$

$(x_3, x_4, x_5)$  sont des variables d'écart :



**Initialisation :**

	c	1	2	0	0	0	
base	b	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$\theta$
$x_3$	2	-3	2	1	0	0	1
$x_4$	4	-1	2	0	1	0	2
$x_5$	5	1	1	0	0	1	5
z=0	$\Delta_j$	-1	-2	0	0	0	

↑  
 $j_0 = 2$

$\rightarrow j_1 = 3$

**1<sup>ère</sup> itération :**

	c	1	2	0	0	0	
base	b	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$\theta$
$x_2$	1	$-3/2$	1	$1/2$	0	0	$\times$
$x_4$	2	2	0	-1	1	0	1
$x_5$	4	$5/2$	0	$-1/2$	0	1	$8/5$
z=4	$\Delta_j$	-4	0	1	0	0	

↑  
 $j_0 = 1$

$\rightarrow j_1 = 4$

**2<sup>ème</sup> itération :**

	c	1	2	0	0	0	
base	b	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$\theta$
$x_2$	$5/2$	0	1	$-1/4$	$3/4$	0	$\times$
$x_1$	1	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	$\times$
$x_5$	$3/2$	0	0	$3/4$	$-5/4$	1	$4/3$
z=6	$\Delta_j$	0	0	-1	2	0	

↑  
 $j_0 = 3$

$\rightarrow j_1 = 5$

**3<sup>ème</sup> itération :**

	c	1	2	0	0	0	
base	b	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$\theta$
$x_2$	3	0	1	0	$1/3$	$1/3$	
$x_1$	2	1	0	0	$-1/3$	$2/3$	
$x_3$	2	0	0	1	$-5/3$	$4/3$	
z=8	$\Delta_j$	0	0	0	2	$4/3$	

condition d'arrêt vérifiée ( $\Delta_j \geq 0$ ) donc on arrête. La solution optimale est :  $x^* = (2, 3, 2, 0, 0)$  et (Z) optimale :  $Z^0 = 8$ .

## 2.3 La programmation linéaire multi-objectif

### 2.3.1 Introduction

La programmation multi-objectif cherche à optimiser plusieurs composantes d'un vecteur de fonctions coût. A l'instain l'optimisation mono-objectif, la solution d'un problème multi objectif (MOP) n'est pas une solution unique, mais un ensemble de solutions connues comme l'ensemble des solutions Pareto optimales (PO).

Toute solution de cet ensemble est optimale dans le sens qu'aucune amélioration ne peut être faite sur un composant du vecteur sans la dégradation d'au moins un autre composant du vecteur.

**MOP : Multiple Objective Programming.**

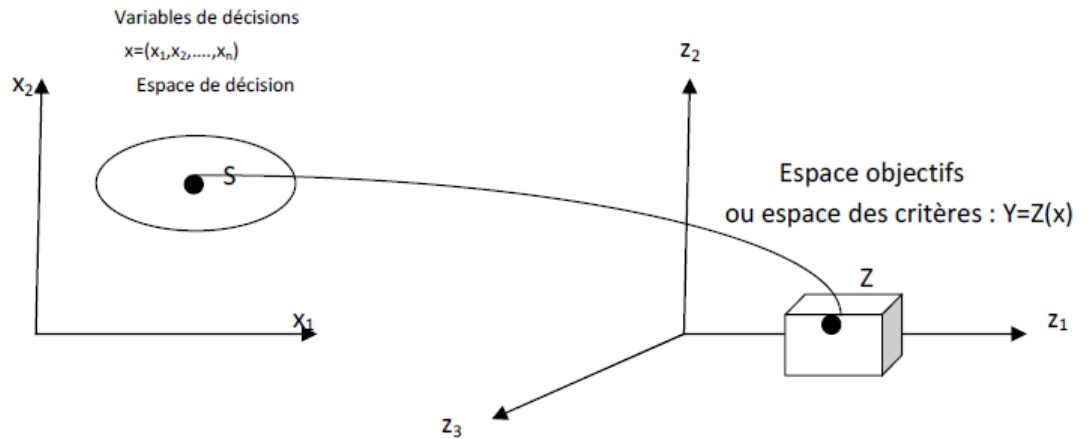
**MOLP : Multiple Objective Linear Programming.**

### 2.3.2 Concepts de base

Mathématiquement, un problème d'optimisation multi-objectif (MOP) peut être défini de la manière suivante :[5]

$$(MOP) \begin{cases} \max(\min) Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_r(x)) \\ s.c \ x \in S \end{cases}$$

Où ( $r \geq 2$ ) est le nombre de fonctions objectifs,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$  est le vecteur représentant les variables de décision,  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / g_j(x) \leq 0, x \geq 0\}$  représente l'ensemble des solutions réalisables associées à des contraintes d'égalités, d'inégalités et de bornes explicites (espace de décision).  $Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_r(x))$  est le vecteur des critères à optimiser.  $Z_i$  et  $g_j$ ,  $i \leq r$  et  $j \leq m$  : sont des fonctions linéaires à valeurs réelles du vecteur de décision. L'ensemble  $Y = Z(S)$  représente les points réalisables dans l'espace des critères ( espace objectif), et  $Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_r(x))$  avec  $Y_i = Z_i(x)$  représente un point de l'espace des critères.



Figure(1) :Représentation de l'espace des décisions et l'espace des objectifs correspondant pour  $n= 2$  et  $r=3$ .

**Remarque :**

Les relations suivantes sont définies pour un problème de minimisation.

**2.3.3 Efficacité**

**2.3.3.1 Pareto optimale**

Une solution  $x^* \in S$  est Pareto optimale si et seulement s'il n'existe pas une solution  $x \in S$ , telle que  $Z(x)$  domine  $Z(x)^*$ .

La définition de la Pareto optimalité découle directement de la notion de dominance. Elle signifie qu'il est impossible de trouver une solution qui améliore les performances sur un critère sans que cela entraîne une dégradation des performances sur au moins un autre critère. Elles forment le front Pareto. Les solutions Pareto optimales sont aussi connues sous le nom de solutions efficaces, non dominées ou non inférieures.

**2.3.3.2 Efficacité faible**

Une solution  $x^*$  est dite faiblement efficace, s'il n'existe aucun vecteur  $x \in S$  telle que  $Z_i(x) < Z_i(x^*) \forall i \in [1, 2, \dots, r]$ .

Une solution est faiblement efficace si son vecteur critère est faiblement non dominé.

### 2.3.3.3 Le point idéal

Le vecteur idéal  $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*)$  est le vecteur qui optimise chacune des fonctions objectif  $Z_i$ .

C'est à dire :  $y_i^* = \min(Z_i(x), x \in S)$

Il est clair que si le vecteur idéal est réalisable, il est la solution du problème (MOP), mais ce n'est pas en général possible à cause des conflits qui existent entre les critères.

### 2.3.3.4 Point anti-idéal

Le vecteur  $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*)$  définit par  $y^* = \max(Z_i(x), x \in S)$ , est le point anti-idéal.

### 2.3.3.5 Vecteur de référence

Un vecteur de référence  $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*)$  est un vecteur qui définit le but à atteindre par chaque objectif  $Z_i$ .

### 2.3.3.6 Front Pareto

C'est l'ensemble des vecteurs de décision qui ne sont pas dominés.

## 2.3.4 Dominance

Soient deux vecteurs critères  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_r)$  et  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_r)$ . On dit que  $Y$  domine  $Z$  si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall j \in [1, \dots, r], Y_j \leq Z_j \\ \exists i \in [1, \dots, r], Y_i < Z_i \end{cases}$$

**C'est-à-dire :**

Si  $Y$  domine  $Z$ , alors  $Y$  est au moins aussi bon que  $Z$  sur tous les critères et meilleur que lui sur au moins un des critères.

### 2.3.4.1 Dominance forte

Soient deux vecteurs critères  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_r)$  et  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_r)$ . On dit que  $Y$  domine fortement  $Z$  si et seulement si :

$$\forall i \in [1, \dots, r] \ Y_i < Z_i$$

**C'est-à-dire :**

Si  $Y$  domine fortement  $Z$ , alors  $Y$  est meilleur que  $Z$  sur tous les critères.

### 2.3.4.2 Dominance faible

Soient deux vecteurs critères  $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$  et  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_r)$ , on dit que  $y$  domine faiblement  $Z$  si et seulement si :

$$\forall i \in [1, \dots, r], \ y_i \leq Z_i.$$

### 2.3.4.3 Non-dominance

Soit  $y^*$  un vecteur critère tel que  $Y^* \in Y$ , on dit que  $Y^*$  est non dominé si et seulement s'il n'existe aucun autre vecteur critère  $Y \in Y$  tel que :

$$\forall (i \in [1, \dots, r]), \ Y_i \leq Y_i^*, \text{ et } Y_i < Y_i^* \text{ pour au moins un indice } i.$$

Dans le cas contraire on dit que  $Y^*$  est dominé.

### 2.3.4.4 Dominance au sens Geoffrion

Une autre forme de dominance importante dans le monde de l'optimisation multi objectif est la dominance au sens de Geoffrion elle est plus forte que l'autre, les solutions optimales obtenues par ce type de dominance sont appelées solutions Paréto optimales propres.

**Définition :** Une solution  $x^* \in S$  est appelé solution paréto optimale propre pour le problème multi objectif qu'on a noté (MOP) si :

1.  $x^*$  est paréto optimale et
2. S'il existe un nombre  $M > 0$  tel que  $\forall i = \overline{1, k} \forall x \in S$ , vérifiant  $Z_i(x) < Z_i(x^*)$  alors il existe au moins  $j \in \{1, \dots, k\}$  tel que  $Z_j(x^*) < Z_j(x)$  et  $\frac{Z_i(x^*) - Z_i(x)}{Z_j(x) - Z_j(x^*)} \leq M$ .

Considérons le problème paramétrique mono-objectif suivant :

$$(P_\lambda) \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i Z_i(x) \\ x \in S \end{cases}$$

Où  $\lambda_i$  sont des poids relatif à chaque objectif  $f_i$  ( $i = 1 \dots k$ ).

Tel que  $\lambda_i \geq 0$ ;  $\forall i = 1 \dots k$  et  $\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i = 1$

**Théorème de Geoffrion (propre)** Si  $x^*$  est une solution optimale du problème  $(P_\lambda)$  avec  $\left[ \lambda_i > 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right]$  alors  $x^*$  est paréto optimale propre pour le problème (MOP).

**Remarque** Pour un problème multi objectif à maximum, le problème paramétrique correspondent

$$(P_\lambda) \begin{cases} \max \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i Z_i(x) \\ x \in S \end{cases}$$

**Exemple**

$$(MOP) \begin{cases} \min (f_1(x) = -3x_1 - x_2, f_2(x) = x_1 + 2x_2) \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \end{cases}$$

on donne  $\lambda_1 = 0.5$  et  $\lambda_2 = 0.5$

le problème paramétrique correspond au problème (MOP) s'écrit :

$$(P_\lambda) \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{i=2} \lambda_i f_i(x) \\ x \in E \end{cases}$$

$$(P_\lambda) \begin{cases} \min \left( \frac{1}{2}(-3x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(x_1 + 2x_2) \right) = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(P_\lambda) \begin{cases} \min (-x_1 + \frac{1}{2}x_2) \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

la solution optimale  $x_1^* = 2, x_2^* = 0$  donc d'après Geoffrion  $x^*(2, 0)$  est paréto optimale propre donc  $x^*$  est efficace pour (MOP)

### 2.3.4.5 Convexité

Un ensemble  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  est convexe si et seulement si l'équivalence suivante est vérifiée :

$$\forall x \in A \text{ et } y \in A \Leftrightarrow \text{segment } [xy] \subseteq A$$

La convexité est le premier indicateur de la difficulté du problème. En effet, plusieurs méthodes d'optimisation sont incapables de résoudre d'une façon optimale des problèmes non convexes. Mais il existe d'autres indicateurs tout aussi importants, notamment la continuité, la nature des variables de décision (entières ou réelles).

### 2.3.5 Test d'efficacité d'une solution

Soit le problème multi-objectif linéaire suivant [5] :

$$(MOLP) \quad \begin{cases} \min Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_r(x)) \\ s.c \\ x \in S \end{cases}$$

avec  $r \geq 2$

**Théorème 1 :** [5]

Soit  $\bar{x} \in S$  est efficace s'il existe :

$$\lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^r / \sum_{j=1}^r \lambda_j = 1, \lambda_j > 0 \right\}$$

**Respectivement faiblement efficace :**

$\exists \lambda \in \bar{\Lambda} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^r / \sum_{j=1}^r \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \right\}$  telle que  $x$  minimise le problème des sommes pondérées donné par :

$$\begin{cases} \min \lambda' C' x \\ s.c \\ x \in S \end{cases}$$

Avec  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$

**Théorème 2 :** [5]

Si  $S$  possède un point efficace, alors au moins un point extrême de  $S$  est efficace.

**Preuve**

Soit  $\bar{x}$  un point efficace de  $S$ , d'après le théorème 1, il existe  $\lambda \in \Lambda$  tel que :

$$\lambda' C' \bar{x} = \min_{x \in S} \lambda' C' x$$

Comme une fonction linéaire atteint son optimum en un point extrême, donc  $\bar{x}$  est extrême efficace.

**Théorème 3 : [5]**

Soit  $x \in S$  un point extrême associé à une base efficace  $B$ , alors  $x$  est efficace.

**Preuve :**

Puisqu'il existe un  $\lambda \in \Lambda$  pour lequel  $B$  est une base optimale par le théorème 1,  $x$  est efficace.

**Remarque :**

On dit que  $x$  est un point extrême de  $S$  s'il ne peut pas s'écrire comme une combinaison convexe stricte de deux points de  $S$ .

$$\nexists x_1, x_2 \in S, \lambda \in ]0, 1[ \text{ pour les quels } (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 = x / x_1 \neq x_2$$

**Théorème 4 : [5]**

Soient  $B$  et  $\bar{B}$  deux bases efficaces adjacentes obtenues à partir d'un pivot efficace, et soient  $x$  et  $\bar{x}$  les points extrêmes associés à  $B$  et  $\bar{B}$  respectivement alors, l'arête  $(x, \bar{x})$  est efficace.

**Théorème 5 : [5]**

Soit  $(x, \bar{x})$  l'arête efficace infini de  $S$ .

Alors,  $x$  est un point extrême efficace associé à une base efficace  $B$ .



### 2.3.6 Méthode du simplexe multicritère

La méthode du simplexe multicritère consiste à générer un premier point efficace à partir d'une solution de base réalisable, puis à recenser (énumérer) tous les autres points efficaces. Cependant cette méthode ne teste pas toutes les bases car certaines sont dominées de manière évidente. Étant donné le problème :

$$(P) \begin{cases} \max Z_1 = c'_1 x \\ \max Z_2 = c'_2 x \\ \vdots \\ \max Z_k = c'_k x \\ Ax = b, x \geq 0 \end{cases}$$

Dans le tableau suivant , on suppose sans perte de généralités que les m premières variables sont dans la base.

Et soient :

$J_B$  : ensemble des indices basiques.

$J_N$  : ensemble des indices hors base.

						$C^1$	$C^2$	$\vdots$	$C^K$				
						$C^1_1$	$C^2_1$	$\vdots$	$C^K_1$				
						$\vdots$							
						$C^1_m$	$C^2_m$	$\vdots$	$C^K_m$				
						$C^1_{m+1}$	$C^2_{m+1}$	$\vdots$	$C^K_{m+1}$				
						$\vdots$							
						$C^1_J$	$C^2_J$	$\vdots$	$C^K_J$				
						$\vdots$							
$C^1_B$	$C^2_B$	$C^J_B$	$C^K_B$	base	$B$	$a_1$	$\vdots$	$a_m$	$a_{m+1}$	$\vdots$	$a_J$	$\vdots$	
$C^1_1$	$C^2_1$	$C^J_1$	$C^K_1$	$a_1$	$b_1$	1	$\vdots$	0	$x_{1,m+1}$	$\vdots$	$x_{1,J}$	$\vdots$	
							0		$\vdots$				
							0		$\vdots$				
$C^1_m$	$C^2_m$	$C^J_m$	$C^K_m$	$a_m$	$b_m$	0		1	$x_{m,m+1}$	$\vdots$	$x_{m,J}$	$\vdots$	
						0	0	0	$\Delta^1_{m+1}$		$\Delta^1_J$		
							0	0	$\Delta$				
						0	0		$\Delta^i_{m+1}$	$\vdots$	$\Delta^i_J$	$\vdots$	
							0						
						0	0	0	$\Delta^K_{m+1}$	$\vdots$	$\Delta^K_J$	$\vdots$	

$$Z_0 = \begin{pmatrix} Z^1_0 = C'^1 b \\ Z^2_0 = C'^2 b \\ \vdots \\ Z^k_0 = C'^k b \end{pmatrix}$$

De la théorie du simplexe uni-critère on a :

$$1- \Delta^i_j = \sum_{r \in J_B} C'^i_r x_{rj} - C'^i_j \quad j \in J_N, \forall i = \overline{1, k}$$

$$\text{Et } Z^i_0 = \sum_{r \in J_B} C'^i_r b_r, \forall i = \overline{1, k}$$

**Si :**

$\Delta_j^i \geq 0, \forall j \in J_N$ , alors  $x^0 = (b, 0)'$ ,  $(b \in R_+^m, 0 \in R)^{n-m}$  est une solution optimale pour le critère  $i$

2- Si on introduit la  $j^{ième}$  variable dans la base, nous obtenons une nouvelle solution  $x_1$  et un vecteur :

$$\hat{Z}_0 = Z_0 - \theta_j \Delta_j$$

$$\text{Où : } \hat{Z}_0 = \begin{pmatrix} \hat{Z}_0^1 \\ \hat{Z}_0^2 \\ \vdots \\ \hat{Z}_0^K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_0^1 \\ Z_0^2 \\ \vdots \\ Z_0^K \end{pmatrix} - \theta_j \begin{pmatrix} \Delta_j^1 \\ \Delta_j^2 \\ \vdots \\ \Delta_j^K \end{pmatrix}$$

$$3- \theta_j = \min \left\{ \frac{b_r}{x_{rj}} / x_{rj} > 0 \right\} \quad \forall j \in J_N, \quad r \in J_B.$$

**Remarque 1 :**

1- Soit  $x^\circ$  une solution basique réalisable.

a- S'il existe un  $j \in J_N$  tel que tous les  $\Delta_j^i \leq 0$ , avec au moins une inégalité stricte et si  $\theta_j > 0$ , alors la solution courante  $x^\circ$  est dominée.

**En effet :**

Si on introduit la  $j^{ième}$  variable, on obtient un point extrême adjacent  $x^1$  pour lequel avec  $\hat{Z}_0 \geq Z_0$  avec au moins une inégalité stricte, car :

$$\theta_j \Delta_j \leq 0, \text{ donc } \hat{Z}_0 = Z_0 - \theta_j \Delta_j \geq Z_0$$

bS'il existe un  $j \in J$  tel que  $\Delta_j^i \geq 0$ , avec au moins une inégalité stricte et si de plus  $\theta_j > 0$  alors l'introduction de la  $j^{ième}$  variable a la base mène à une solution dominée

**En effet :**

Si on introduit la variable  $j$  dans la base, on aura un nouveau point extrême  $x_1$  pour lequel :

$$\hat{Z}_0 = Z_0 - \theta_j \Delta_j \leq Z_0 \text{ avec au moins une inégalité stricte.}$$

2- Soit  $x^0$  une solution basique réalisable s'il existe  $j_1, j_2 \in J_N$  tel que :

$\theta_{j_1} \Delta_{j_1} \leq \theta_{j_2} \Delta_{j_2}$  avec au moins une inégalité stricte, alors l'introduction de la variable d'indice  $j_2$  dans la base conduit à une solution dominée par celle

résultante de l'introduction de la variable d'indice  $j_1$ .

**En effet :**

$\theta_{j_1} \Delta_{j_1} \leq \theta_{j_2} \Delta_{j_2}$  avec au moins une inégalité stricte, cela implique que :

$Z_0 - \theta_{j_2} \Delta_{j_2} \leq Z_0 - \theta_{j_1} \Delta_{j_1}$  avec au moins une inégalité stricte.

**Remarque 2 :**

1- S'il existe un indice  $i \in \{1, \dots, k\}$  tel que  $\Delta_j^i \geq 0 \forall j \in J_N$ , alors le  $i^{\text{ème}}$  critère est à son maximum et la solution basique correspondante est non dominée à condition qu'il n'existe pas de colonne  $k$  avec  $\Delta_k^i = 0$ .

2- D'après la remarque précédente, seules les colonnes (variables) non comparables à zéro et les variables  $x_j$ , et  $x$  telle que :  $\theta_k \Delta_k$  incomparable à  $\theta_j \Delta_j$  sont admissibles pour une introduction dans la base.

Dans ce cas, on ne peut dire si la solution correspondante est dominée ou pas.

Pour cela on considère le test dit de non dominance énoncé par le théorème suivant :

**Théorème :(Test de dominance) [5]**

Soit le problème :

$$\begin{aligned} \max v &= \sum_{i=1}^K \varepsilon_i \\ C'x - \xi &= C'\bar{x} \\ x \in S &= \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\} \\ \xi &\in \mathbb{R}^n, \xi \geq 0, \bar{x} \in S. \end{aligned}$$

**Alors :**

$\bar{x}$  est efficace si et seulement si  $\max v = 0$ .

$\bar{x}$  est dominée si et seulement si  $\max v > 0$ .

# Chapitre 3

## programmation linéaire stochastique

### 3.1 Introduction

La programmation linéaire stochastique est une technique qui se caractérise par le souci d'une meilleure appréhension des problèmes réels. Son objectif est de prendre en compte les phénomènes aléatoires intervenant en pratique, exclus par les méthodes déterministes.[3]

Dans un cas général , le problème linéaire stochastique s'écrit [8]

$$\begin{cases} \text{"min"} & Z(\omega) = c'(\omega)x \\ A(\omega)x & \leq b(\omega) \\ x \in T_1 \end{cases} \quad (Ps_1)$$

où  $(A, c, b)$  - de dimension respective  $(m \times n), (n \times 1)$  et  $(m \times 1)$ - est un vecteur aléatoire sur un espace de probabilité  $(\Omega, F, P)$  [8] et  $T_1$  est un polyèdre convexe déterministe , par exemple :

$$T_1 = \{x \mid x \geq 0, A_1 x \leq b\}$$

Nous supposons que les contraintes sont fournies sous forme d'inégalités - par introduction de variables d'écart mais ceci sans aucune restriction .

Le symbole "" signifie qu'il s'agit d'une optimisation imprécise du point de vue mathématique.

## 3.2 Les différentes approches

Il existe deux approches de la programmation linéaire stochastique :

-L'approche passive ou "wait and see".

-L'approche active ou "here and now".

### 3.2.1 Approche passive ou "wait and see"

Dans cette approche le décideur peut attendre la réalisation des variables aléatoire et résoudre le programme déterministe résultant . Dans ce cas on s'intéresse généralement à la distribution de probabilité de la valeur optimale ou son espérance mathématique (et/ou) sa variance.

### 3.2.2 Approche active ou "here and now"

Cette approche est basée sur la décision sur  $x$  ou stratégie sur  $x$  qui est prise à l'avance, avant la réalisation des variables aléatoires.

## 3.3 Critère d'optimisation du problème équivalent

### 3.3.1 Cas des objectifs aléatoires

Plusieurs façons de définir la fonction objectif du problème équivalent peuvent être considérées.

Soit  $T = \{x \in \mathbb{R}^n / A(x) \leq b, x \geq 0\}$

#### 3.3.1.1 Le critère de l'espérance mathématique (E-modèle) ou *critère de bayes*.

Ce critère consiste à remplacer la variable aléatoire de l'objectif par son espérance mathématique ;

$$\begin{cases} \min E(Z(\omega)) \\ x \in T \end{cases} \quad (1.1)$$

### 3.3.1.2 Le critère de la variance (V-modèle)

Ce critère consiste à minimiser la variance de l'objectif comme suit :

$$\begin{cases} \min \sigma^2(Z(\omega)) = \min x'Vx \\ x \in T \end{cases} \quad (1.2)$$

Avec  $V$  est la matrice de covariance du vecteur aléatoire  $c(\omega)$

### 3.3.1.3 Le critère espérance-variance (E-V modèle)

Ce modèle consiste à minimiser la variance de l'objectif  $z(\omega)$  tout en réalisant un niveau de rendement minimum  $Z_0$  fixé préalablement par le décideur :

$$\begin{cases} \min_{x \in T} \sigma^2(Z(\omega)) \\ E(z(\omega)) \geq Z_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Le problème, est de choisir  $Z_0$  convenable.

### 3.3.1.4 Le critère de risque minimal (P-modèle)

Ce critère est basé sur la maximisation de la probabilité que la valeur de l'objectif est au moins égale à un certain niveau  $u$  choisi par le décideur, où ce paramètre  $u$  à fixer, correspond à un niveau de risque à respecter .

Le problème est le suivant :

$$\begin{cases} \max P(c'(\omega)x \leq u) \\ x \in T \end{cases} \quad (1.4)$$

La solution de ce problème, dans le cas gaussien, est donnée par le programme fractionnel suivant :

$$\begin{cases} \max \frac{\bar{c}'x + u}{\sqrt{x'Vx}} \\ x \in T \end{cases} \quad (1.5)$$

$\bar{c}$  : Représente l'espérance mathématique de vecteur aléatoire  $c(\omega)$ .

$V$  : La matrice covariance de vecteur aléatoire  $c(\omega)$ .

$x'Vx$  : La variance de l'objectif  $c(\omega)x$ .

### 3.3.1.5 Le critère de Katoka

Supposons que  $\alpha \in ]0, 1[$  donnée. Soit l'interprétation [1]

$$\begin{cases} \min u \\ P(c'(\omega)x \leq u) = \alpha \\ x \in T \end{cases} \quad (1.6)$$

Dans le cas gaussien on a :

$$P(\omega/c'(\omega)x \leq u) = P\left\{\omega/\frac{c'(\omega)x - \bar{c}'x}{\sqrt{x^t V x}} \leq \frac{u - \bar{c}'x}{\sqrt{x^t V x}}\right\} = \phi\left(\frac{u - \bar{c}'x}{\sqrt{x^t V x}}\right) = \alpha \implies \frac{u - \bar{c}'x}{\sqrt{x^t V x}} = \phi^{-1}(\alpha) \implies u = \bar{c}'x + \phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^t V x}$$

$\phi$  : Est la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite.

Par conséquent résoudre le problème (1.6) revient, dans ce cas gaussien, à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \min \bar{c}'x + \phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^t V x} \\ x \in T \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\bar{c}'x + \phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^t V x} \text{ est convexe si } \phi^{-1}(\alpha) \geq 0 \iff \alpha \geq \frac{1}{2}$$

ce qui revient à dire , si on revient au problème (1.7), si  $P(\omega/c'(\omega)x \leq u) = \alpha \geq \frac{1}{2}$  ; avoir le minimum de perte avec une probabilité supérieure ou égale à  $\frac{1}{2}$

(Si  $\alpha = 1$  on revient au E-modèle).

### 3.3.2 Cas de contraintes aléatoires

Dans cette partie nous supposons que l'objectif est déterministe ou qu'il a été rendu déterministe en appliquant l'un des critères précédents . Mais les contraintes sont stochastiques

$$A(\omega)x \leq b(\omega)$$

La première méthode utilisée pour la résolution d'un programme linéaire stochastique consiste à remplacer chacune des variables aléatoires des contraintes par leurs espérances mathématiques respectives et résoudre le programme déterministe résultant.

### Remarque :

Nous nous sommes inspiré l'exemple suivant de [1]

### Exemple

Soit le programme stochastique suivant :

$$\left( P'_s \right) \begin{cases} \min x_1 + x_2 \\ b_1(\omega) x_1 + x_2 \geq 7 \\ b_2(\omega) x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Où  $b_1(\omega) \in [2, 4]$  et  $b_2(\omega) \in [\frac{1}{2}, 1]$  suivent des lois uniformes indépendante sur leur intervalles

En remplaçant  $b_1(\omega)$  et  $b_2(\omega)$  par leur espérance mathématique, avec :

$$E(b_1(\omega)) = \frac{2+4}{2} = 3 \text{ et } E(b_2(\omega)) = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Le problème déterministe équivalent est :

$$\left( P'_d \right) \begin{cases} \min x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_2 \geq 7 \\ \frac{3}{4}x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution optimale est  $x_1^* = \frac{4}{3}$  et  $x_2^* = 3$  et  $Z^* = \frac{13}{3}$

Cherchons la probabilité pour que cette solution soit réalisable :

$$\begin{aligned} P(b_1(\omega) x_1^* + x_2^* \geq 7, \frac{3}{4}x_1^* + x_2^* \geq 4) &= P(b_1(\omega) \geq 3) \cdot P(b_2(\omega) \geq \frac{3}{4}) \\ &= (1 - F_{b_1}(3)) \cdot (1 - F_{b_2}(\frac{3}{4})) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Où  $F_{b_1}$  et  $F_{b_2}$  sont les fonctions de répartition des variables aléatoires respectives de  $b_1(\omega)$  et  $b_2(\omega)$ .

La probabilité pour que cette solution soit réalisable est donc faible, ce qui montre le manque de réalisme d'une telle méthode.

Donc pour la résolution d'un programme linéaire stochastique, on utilise deux modèles essentiels :

-Modèles avec seuil de probabilités sur les contraintes ("chance constrained programming").

-Modèle avec recours.



### 3.3.2.1 Modèles avec seuil de probabilités sur les contraintes (“chance constrained programming”)

Ce modèle a été introduit en programmation stochastique par **Charnes** et **Cooper** (1959). L'idée de la modélisation consiste à imposer que la violation des contraintes ne se produise qu'avec une probabilité fixée.

-Soit on impose un seuil de probabilité  $\alpha$  avec  $0 < \alpha \leq 1$ , pour l'ensemble des contraintes.

Soit le problème stochastique suivant :

$$\begin{cases} \min c' x \\ A(\omega) x \leq b(\omega) \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Le problème déterministe équivalent de (1.8) est donc

$$\begin{cases} \min c' x \\ P(A(\omega) x \leq b(\omega)) \geq \alpha \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

-Soit on impose un seuil de probabilité individuel  $\alpha_i$ , avec  $0 < \alpha_i \leq 1$  pour chacune des contraintes. Le problème déterministe équivalent de (1.8) est donc :

$$\begin{cases} \min c' x \\ P(A_i(\omega) x \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i \\ x \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (1.10)$$

Dans les deux cas la question est de savoir si les ensembles :

$$T(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n / P(A(\omega) x \leq b(\omega)) \geq \alpha, x \geq 0\}$$

et

$$T(\alpha_i) = \{x \in \mathbb{R}^n / P(A_i(\omega) x \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i, x \geq 0\} \quad i = 1, \dots, m$$

Sont convexes.

La convexité de ces deux ensembles ne dépend pas seulement de la distribution de  $A$  et  $b$ , mais aussi des seuils  $\alpha$  et  $\alpha_i$ .

Citons quelques conditions de convexité de  $T(\alpha)$  ou  $T(\alpha_i)$

•Cas où  $A$  et  $b$  sont aléatoires, mais de distribution discrète

Soit  $P(A = A^i; b = b^i) = p_i \quad i = 1, \dots, m$

$$\begin{cases} T_i(\alpha_i) \text{ est convexe si } \alpha_i \geq \max_{1 \leq i \leq m} (1 - p_i) \\ T(\alpha) \text{ est convexe si } \alpha \geq \max_{1 \leq i \leq m} (1 - p_i) \end{cases}$$

•Cas où  $A$  et  $b$  sont aléatoires, mais de distribution normale

$$T_i(\alpha_i) \text{ est convexe si } \alpha_i \geq \frac{1}{2}$$

•Cas :  $A$  et  $b$  non indépendantes [4]

Pour ce cas général, on suppose que  $(A_i, b_i)$  est un vecteur aléatoire normalement distribué de moyenne  $\mu_i \in \mathbb{R}^{n+1}$  et de matrice de covariance  $V_i$ . En vertu de la théorie des probabilités, la variables aléatoire  $t_i(x) = A_i x - b_i$  a une distribution normale de moyenne  $m_i(x) = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j - \mu_{i,n+1}$  et de variance  $\sigma_i^2(x) = z' V_i z$  avec  $z = (x_1, x_2, \dots, x_n, -1)'$  et  $\sigma_i(x) > 0, \forall x$  car  $x_{n+1} = -1$ .

$$\begin{aligned} T(\alpha_i) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(t_i(x) \leq 0) \geq \alpha_i\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid P\left(\frac{t_i(x) - m_i(x)}{\sigma_i(x)} \leq \frac{-m_i(x)}{\sigma_i(x)}\right) \geq \alpha_i\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi\left(\frac{-m_i(x)}{\sigma_i(x)}\right) \geq \alpha_i\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid m_i(x) + \phi^{-1}(\alpha_i) \sigma_i(x) \leq 0\}. \end{aligned}$$

Puisque  $m_i(x)$  est affine en  $x$  et  $\sigma_i(x)$  est convexe en  $x$ , la contrainte  $m_i(x) + \phi^{-1}(\alpha_i) \sigma_i(x) \leq 0$  est convexe si et seulement si  $\phi^{-1}(\alpha_i) \geq 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\alpha_i \geq \frac{1}{2}$

•Cas où  $A$  est déterministe,  $b$  aléatoire[8]

$$\begin{cases} T_i(\alpha_i) \text{ est toujours convexe} \\ T(\alpha) \text{ est convexe si la distribution conjointe des composantes } b_i \text{ du vecteur } b \text{ est quasi concave}^2 \end{cases}$$

Intéressons-nous à présent au cas particulier  $A$  déterministe et  $b$  aléatoire et notons  $F_i(t)$  la fonction de répartition de  $b_i$ .

•Seuil individuel de probabilité

Le problème (1.10) est équivalent au problème linéaire

$$\begin{cases} \min c'x \\ A_i(\omega) x \leq F_i^{-1}(1 - \alpha_i) \quad i = 1, \dots, m \\ x \geq 0 \end{cases}$$

### 3.3.2.2 Modèle avec recours

**a-Le recours général** Pour présenter cette approche, on procède en deux étapes :

choisissons  $\bar{x}$ , préalablement à toute réalisation de l'aléatoire "here and now".

-Ensuite, étant donnée une réalisation observée  $\bar{\omega} \in \Omega$ , une décision corrective représentée par un vecteur  $y(k \times 1)$  appelé recours est prise pour compenser la violation des contraintes qui correspond. Cette compensation se fait par l'introduction d'une pénalité  $q'(\omega) y$  qui est généralement linéaire.

La minimisation de cette pénalité correspond au problème de recours où de deuxième niveau de la forme suivante :

$$\begin{cases} Q(\bar{\omega}, \bar{x}) = \min_y q'(\bar{\omega}) y \\ W(\bar{\omega}) y = b(\bar{\omega}) - A(\bar{\omega}) x \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

où  $\begin{cases} q(\omega) & \text{est un vecteur } (1 \times k) \text{ de pénalisation;} \\ W(\omega) & \text{est une matrice } (m \times k) \text{ de recours} \end{cases}$

Considérées globalement, ces deux étapes fournissent le problème :

$$\begin{cases} \min_x E \left( c'(\omega) x + \min_y q'(\omega) y \right) \\ A(\omega) x + W(\omega) y = b(\omega) \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Qui s'écrit de manière équivalente

$$\min_{x \in T_2} \left( E \left( c'(\omega) x \right) + E \left( Q(x, \omega) \right) \right) \quad (1.13)$$

Où  $T_2 = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall \omega \in \Omega, \exists y \geq 0 / A(\omega) x + W(\omega) y = b(\omega)\}$

Pour que le problème (1.13) ait un sens il faut que l'ensemble  $T_2$  soit non vide, autrement dit, il faut qu'il existe toujours, quelle que soit la réalisation de l'aléatoire, un recours  $y$  possible (c'est-à-dire  $Q(x, \omega) < \infty, \forall \omega \in \Omega$ )

Sous des conditions très générales, il a été montré que ce problème (1.13) est convexe i.e  $T_2$  est convexe et la fonction à optimiser est convexe ( $E(Q(x, \omega))$  est une fonction convexe).

#### **b- Recours fixe**

Le recours fixe correspond au cas où  $W$  et  $q$  sont déterministes.

dans le cas de recours fixe le problème (1.13) est toujours convexe. dans le cas particulier où

-La matrice  $A$  est déterministe;

-Le vecteur  $b$  est une variable aléatoire discrète,  $P(b = b^{(i)}) = p^{(i)} \quad i = 1 \dots m$

Le problème (1.13) est même linéaire et s'écrit :

$$\begin{cases} \min E(c'(\omega))x + \sum_{i=1}^m p^{(i)} q^{(i)} y^{(i)} \\ Ax + W y^{(i)} = b^{(i)} & i = 1 \dots m \\ x \in T_1 \\ y_i \geq 0 & i = 1 \dots m \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $y^{(i)}$  est le vecteur recours correspondant à la réalisation ;

$q^{(i)}$  le vecteur de pénalisation associé

### b- Le recours (fixe) simple

le recours simple correspond où la matrice de recours de dimension  $m \times 2m$  et est égale à  $(I, -I)$  c'est-à-dire  $W = (I, -I)$ .

Où  $I$  est la matrice identité. Dans ce cas, le vecteur  $y$  est décomposé en deux parties :

- $y^+(m \times 1)$  : variable d'écart par défaut ;
- $y^-(m \times 1)$  : variable d'écart par excès.

Parallèlement, le vecteur de pénalisation s'écrit  $q(\omega) = (q^+(\omega), q^-(\omega))$ , avec :

$$q^+(\omega) [b(\omega) - Ax] \text{ si } b(\omega) - Ax \geq 0$$

$$q^-(\omega) [Ax - b(\omega)] \text{ si } b(\omega) - Ax \leq 0$$

Le problème (1.13) s'écrit :

$$\begin{cases} \min_x E(c'(\omega))x + E(\min_{y^+, y^-} q^+(\omega)y^+ + q^-(\omega)y^-) \\ Ax + y^+ - y^- = b(\omega) \\ y^+ \geq 0, y^- \geq 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

### **Théorème 3 (kall , 1976) [4]**

$Q(x, \omega)$  est fini, si et seulement si,  $q^+(\omega) + q^-(\omega) \geq 0$  avec une probabilité 1.

### **Remarque :**

Cette exemple ci-dessous a été inspirer de [4]

## Exemple

$$\begin{cases} \text{"min"} Z(x) = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 0.5x_1 + 0.3x_2 \geq b(\omega) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

où  $b$  est uniforme sur l'intervalle  $[1.3, 1.7]$

Ce problème correspond à la recherche du coût minimal pour une opération de fusion de deux types de minerai. La demande est aléatoire uniforme et un problème de capacité limité l'opération à 4 unités.

- Remplaçons en premier lieu la demande par son espérance  $E(b(\omega)) = \frac{1.3+1.7}{2} = 1.5$

Le problème déterministe équivalent a (1.16) est :

$$\begin{cases} \text{min } Z(x) = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 0.5x_1 + 0.3x_2 \geq 1.5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

La solution optimale est  $x_1^* = 1.5$  et  $x_2^* = 2.5$  et la valeur optimale est  $Z^* = 5.5$ .

Cherchons la probabilité que cette solution soit réalisable

$P(0.5x_1^* + 0.3x_2^* \geq b(\omega)) = P(b(\omega) \leq 1.5) = F_b(1.5) = \frac{1}{2}$ ; la probabilité que cette solution soit réalisable est  $\frac{1}{2}$ .

$F_b$  est la fonction de répartition de  $b(\omega)$ .

-Pour l'interprétation avec seuil sur les contraintes, posons  $\alpha = 0.9$ .

Cette interprétation peut être utilisée par la firme si elle n'a pas de capacité de stockage et souhaite maintenir le nombre de clients satisfaits. Elle doit être en mesure d'assurer les livraisons à 90%. Dans ce cas, la contrainte devient :

$$P(0.5x_1 + 0.3x_2 \geq b(\omega)) \geq 0.9$$

Soit  $F_b$  la fonction de répartition de  $b(\omega)$ , donc :

$$F_b(0.5x_1 + 0.3x_2 \geq b(\omega)) \geq 0.9 \iff 0.5x_1 + 0.3x_2 \geq b(\omega) \geq F_b^{-1}(0.9)$$

et

$$F_b^{-1}(0.9) = 1.66$$

Donc le problème équivalent à (1.17) est :

$$\begin{cases} \min Z(x) = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 0.5x_1 + 0.3x_2 \geq 1.66 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

La solution est :  $x_1^* = 2.3$ ,  $x_2^* = 1.7$ ,  $Z^* = 6.3$

- Considérons maintenant un problème avec recours.

Supposons que la firme ait un contrat stipulant que la demande doit être satisfaite, et qu'elle commande le minerai à l'avance. Si elle produit trop, elle écoule l'excédent chez d'autres clients à 2 unités monétaires au dessous du taux fixé.

Si elle produit trop peu, elle peut acheter sur le marché le complément à 4 unités monétaires au dessus du taux fixé. Les coûts supplémentaires sont :

$$\begin{aligned} & 2(0.5x_1 + 0.3x_2 - b(\omega)) \text{ si } 0.5x_1 + 0.3x_2 - b(\omega) \geq 0 \\ & 4(b(\omega) - 0.5x_1 - 0.3x_2) \text{ si } 0.5x_1 + 0.3x_2 - b(\omega) \leq 0 \end{aligned}$$

Notons  $Q(x_1, x_2, \omega)$  ces coûts supplémentaires, c'est aussi la pénalité que l'on doit ajouter à la fonction économique d'origine.

Le problème avec recours revient à résoudre :

$$\begin{cases} \min 2x_1 + x_2 + E(Q(x_1, x_2, \omega)) \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

L'espérance mathématique de  $Q(x_1, x_2, \omega)$  est  $E(Q(x_1, x_2, \omega)) = Q(x_1, x_2)$

Donc on a :

$$Q(x_1, x_2) = \frac{1}{0.4} \int_{1.3}^{0.5x_1+0.3x_2} 2(0.5x_1+0.3x_2-t)dt + \frac{1}{0.4} \int_{0.5x_1+0.3x_2}^{1.7} 4(t-0.5x_1-0.3x_2)dt = \frac{15}{2}(0.5x_1+0.3x_2)^2 - 17(0.5x_1+0.3x_2) + 18.675$$

Le problème (1.19) devient :

$$\begin{cases} \min \frac{15}{2}(0.5x_1+0.3x_2)^2 - 9.75x_1 - 6.05x_2 + 18.675 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

La solution optimale est :  $x_1^* = \frac{1}{6}$ ,  $x_2^* = \frac{23}{6}$ ,  $Z^* = 5.27$ .

## 3.4 Programmation linéaire multi objectif stochastique

Considérons le programme multi objectif stochastique suivant :

$$\begin{cases} \text{''max''} & (c'_1(\omega)x, c'_2(\omega)x, \dots, c'_k(\omega)x) \\ \sum_{j=1}^n & a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega), \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 & , \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (1.21)$$

où  $c_r(\omega) = (c_{r1}(\omega), c_{r2}(\omega), \dots, c_{rn}(\omega))$  et les  $c_{rj}(\omega)$ ,  $a_{ij}(\omega)$  et  $b_i(\omega)$  avec  $1 \leq r \leq k$ ,  $1 \leq j \leq n$  et  $1 \leq i \leq m$  : sont les variables aléatoires de distributions connues.

### 3.4.1 Programme du risque minimale multiple

Considérons le programme linéaire multiobjectifs stochastique suivant dont les contraintes sont déterministes [1]

$$\begin{cases} \max & (c'_1(\omega)x, c'_2(\omega)x, \dots, c'_k(\omega)x) \\ \sum_{j=1}^n & a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 & , \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (1.22)$$

où  $c_r(\omega) = (c_{r1}(\omega), c_{r2}(\omega), \dots, c_{rn}(\omega))$  et les  $c_{rj}(\omega)$  sont des variables aléatoires et  $a_{ij}$  et  $b_i$  sont déterministes .

$$\text{posons } T_2 = \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i / x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m \right\}.$$

la maximisation des probabilités que les valeurs des  $k$  objectifs soient au moins égales aux seuils de performance  $u_k$ , il en résulte le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$\begin{cases} \max (P(\omega/c'_1(\omega)x \geq u_1), P(\omega/c'_2(\omega)x \geq u_2, \dots, P(\omega/c'_k(\omega)x \geq u_k)) \\ x \in T_2 \end{cases} \quad (1.23)$$

(2.3) est appelé problème à risque minimal multiple à niveau  $u_1, u_2, \dots, u_k$ .

Supposons que chaque  $c_r(\omega)$  est gaussien avec l'espérance mathématique  $\bar{c}_r$  et la matrice de covariance  $V_r$ .

Les solutions de bon compromis de (1.23) peuvent être obtenus en considérant le problème suivant :

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^k \lambda_i P(\omega/c'_i(\omega)x \geq u_i) \\ x \in T_2 \end{cases} \quad (1.24)$$

ou maximiser la probabilité jointe comme suit :[1]

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^k P \{ \omega/c'_1(\omega)x \geq u_1, c'_2(\omega)x \geq u_2, \dots, c'_k(\omega)x \geq u_k \} \\ x \in T_2 \end{cases} \quad (2.15)$$

pour la résolution (1.23) , **Stancu – Minasian** a proposer la méthode suivante :[4]

résolvons le problème suivant :

$$\begin{cases} \max P(\omega/c'_1(\omega)x \geq u_1) \\ x \in T_2 \end{cases} \quad (1.26)$$

Soit  $p_1$  sa valeur optimale .On résout ensuite le problème suivant :

$$\begin{cases} \max P(\omega/c'_2(\omega)x \geq u_2) \\ P(\omega/c'_1(\omega)x \geq u_1) \\ x \in T_2 \end{cases} \quad (1.27)$$

où  $\varepsilon_1$  est donné et  $P(\omega/c'_1(\omega)x \geq u_1) \geq p_1 - \varepsilon_1$  a pour équivalent déterministe , la contrainte  $\bar{c}'_1 x + \psi^{-1}(1 - p_1 + \varepsilon_1)\sqrt{x^t V_1 x} \geq u_1$  ainsi de suite ...

$$\begin{cases} \max P(\omega/c'_k(\omega)x \geq u_k) \\ P(\omega/c'_1(\omega)x \geq u_1) \\ \vdots \\ P(\omega/c'_{k-1}(\omega)x \geq u_{k-1}) \geq p_{k-1} - \varepsilon_{k-1} \\ x \in T_2 \end{cases} \quad (1.28)$$

qui a pour équivalent déterministe le programme suivant :[1]

$$\begin{cases} \max \frac{\bar{c}'_k x - u_k}{x^t V_k x} \\ \bar{c}'_1 x + \psi^{-1}(1 - p_1 + \varepsilon_1)\sqrt{x^t V_1 x} \geq u_1 \\ \vdots \\ \bar{c}'_{k-1} x + \psi^{-1}(1 - p_{k-1} + \varepsilon_{k-1})\sqrt{x^t V_{k-1} x} \geq u_{k-1} \\ x \in T_2 \end{cases} \quad (1.29)$$



D'autre part **Contini** [4] a développé un algorithme selon l'approche "stochastique goal programming" dans le cas où les variables aléatoires sont normales et dont l'espérance mathématique et la variance sont données. Il a établi une équivalence entre le programme stochastique et un programme quadratique déterministe dont le but est de maximiser la probabilité que la fonction objectif appartienne à une région bien déterminée .

### 3.4.2 Programmation d'objectifs stochastiques (Stochastic goal programming)

**Contini** ajoute un vecteur aléatoire  $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$  qui suit une loi normale d'espérance 0 et de matrice de covariance  $V$ .

Le problème revient à maximiser  $Z_k(x) = c'_{k1}(\omega)x_1 + c'_{k2}(\omega)x_2 + \dots + c'_{kN}(\omega)x_N + u_k(\omega) = C'_k(\omega)x + u_k(\omega)$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$

Soient  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_r)$ , et  $\bar{Z}_i$  la valeur que le décideur souhaite qu'elle soit atteinte par  $Z_i$ . l'égalité  $Z_i = \bar{Z}_i$  ne peut avoir lieu à cause des perturbations dues au facteur aléatoire  $u$ .

Alors un domaine  $Y^*$  tel que  $\bar{Z} \in Y^*$ , est choisi au départ , ensuite le problème revient à déterminer le vecteur  $x$  qui maximise la probabilité que  $Z \in Y^*$  d'où le modèle suivant :

$$\begin{cases} \max P(Z(x) \in Y^*) \\ x \in T_2 \end{cases} \quad (1.30)$$

Étant donné que  $u$  est un vecteur aléatoire normale , le domaine  $Y^*$  est un ellipsoïde de  $E^*$  centré en  $\bar{z}$  représenté comme suit :

$Y^* = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_r) / (y - Z')V^{-1}(y - \bar{Z}) \leq e^2\}$  où  $e$  est un scalaire convenablement choisi.

#### **Théorème** [4]

La solution optimale du problème (1.30) est obtenue par la résolution du problème quadratique suivant :

$$\begin{cases} \min \bar{z}'V^{-1}z + x^t(C'V^{-1}C)x + 2(C'V^{-1}\bar{z})' \\ x \in T_2 \end{cases} \quad (1.31)$$

#### **Exemple**

Nous nous sommes inspiré cet exemple de [4] et [1]  
Dans  $\mathbb{R}^2$ , considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \max Z_1(x) = C_1'(\omega)x \\ \max Z_2(x) = C_2'(\omega)x \\ \max Z_3(x) = C_3'(\omega)x \\ A_i(\omega) \leq b_i(\omega) & i = 1, 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ou  $C_1(\omega)$ ,  $C_2(\omega)$  et  $C_3(\omega)$  sont des vecteurs aléatoires indépendants normalement distribués de moyennes  $E(C_1(\omega)) = (3, 5)'$ ,  $E(C_2(\omega)) = (8, 10)'$  et  $E(C_3(\omega)) = (7, 11)'$  et de matrices de covariance

$$\text{COV}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{COV}_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{COV}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs  $(A_i, b_i)$   $i = 1, 2$  sont tels que les variables aléatoires  $t_i(x) = A_i x - b_i$  aient des moyennes respectives  $m_1(x) = 4x_2 - 6$  et  $m_2(x) = 2x_1 - 5$  et des matrices de covariance

$$\text{cov}'_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{cov}'_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Si les seuils de probabilités fixés par le décideur sont tels que

1-pour les contraintes

$$\alpha_1 = 0.977 \implies \phi^{-1}(\alpha_1) = 2$$

$$\alpha_2 = 0.997 \implies \phi^{-1}(\alpha_2) = 2.8$$

2-pour les fonctions objectifs

$$\beta_1 = 0.816 \implies \phi^{-1}(\beta_1) = 0.9$$

$$\beta_2 = 0.984 \implies \phi^{-1}(\beta_2) = 2.1$$

$$\beta_3 = 0.945 \implies \phi^{-1}(\beta_3) = 1.6$$

Le problème multi objectifs déterministe équivalent au problème donné

$$\max u_1(x) = 3x_1 + 5x_2 - 0.9\sqrt{2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2}$$

$$\max u_2(x) = 8x_1 + 10x_2 - 2.1\sqrt{4x_1 + x_2^2 - x_1x_2}$$

$$\max u_3(x) = 7x_1 + 11x_2 - 1.6\sqrt{3x_1^2 + 4x_2^2}$$

$u_1, u_2$  et  $u_3$  sont concaves car  $\beta_j \geq \frac{1}{2} \forall j = 1 \dots 3$  d'après [1]

Sous les contraintes

$$4x_2 - 6 + 2\sqrt{2x_1^2 + 5x_2^2 + 1} \leq 0$$

$$2x_1 - 5 + 2.8\sqrt{2x_1^2 + 24x_1 + 6} \leq 0$$

$$x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0$$

Ces contraintes sont convexes d'après le raisonnement suivi dans [4]

Donc pour résoudre cet exemple, on minimisera les objectifs opposés, et cela revient à résoudre un problème convexe grâce à des méthodes classiques (par exemple les facteurs de Lagrange), et les méthodes numériques (méthode de Newton, ...etc).

# Chapitre 4

## La programmation mathématique

### 4.1 Introduction

La programmation mathématique, et plus particulièrement l'optimisation vise à résoudre des problèmes où l'on cherche à déterminer parmi un grand nombre de solutions candidates celle qui donne le meilleur rendement par exemple (cout).

Plus précisément, on cherche à trouver une solution satisfaisant un ensemble de contraintes qui minimise ou maximise la fonction objectif donnée. L'application de la programmation mathématique est en expansion croissante et se retrouve dans plusieurs domaines.

Dans ce chapitre, nous allons présenter les problèmes classiques d'optimisation, et leurs conditions d'optimalité et définir quelques notions usuelles.

D'une façon générale un programme mathématique dans  $\mathbb{R}^n$  est un problème d'optimisation sous la forme suivante [9] :

$$(P_2) \begin{cases} \min(\text{ou max}) f(x) \\ \text{s.c} \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = \{1, 2, \dots, m\} \\ h_j(x) = 0, \quad j = \{1, 2, \dots, p\} \\ x \in S \subseteq \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continument différentiable appelée fonction objectif; et l'ensemble des conditions  $\{g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \text{ et } h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p / x \in S \subseteq \mathbb{R}^n\}$  les contraintes de problème  $(P_2)$ .

L'ensemble  $D = \{x \in S \subseteq \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \text{ et } h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p\}$  est appelée l'ensemble des solutions réalisables du problème  $(P_2)$ .

## 4.2 Notions de base

**Remarque :**

Ces relations sont définies pour un problème de minimisation pour le problème  $(P_2)$ .

**Définition 1** [9]

On appelle solution réalisable du problème  $(P_2)$ , tout point appartenant à  $D$ .

**Définition 2** [9]

Un point  $x^* \in D$  qui minimise la fonction objectif sur  $D$  est dite solution optimale globale du problème  $(P_2)$  si et seulement si :

$$\forall x \in D \quad f(x) \geq f(x^*)$$

On note  $\arg \min_D f(x)$ , l'ensemble des solutions optimales du problème  $(P_2)$ .

**Définition 3** [9]

Un point  $x^* \in D$  est une solution optimale locale de  $(P_2)$ , s'il existe un voisinage  $V$  de  $x^*$ , et un  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq f(x^*), \quad \forall x \in V(x^*) \\ \text{Où} \\ V(x^*) = \{x \in D / \|x - x^*\| < \varepsilon\} \end{array} \right.$$

$x \in V(x^*)$  et on note par  $\text{locmin}_D f(x)$  l'ensemble des solutions optimales locales de  $(P_2)$ .

Et de plus si  $f$  et  $D$  sont convexes, le minimum local est global pour le problème  $(P_2)$ .

**Remarques :**

Le problème d'optimisation précédent consiste :

- soit à chercher un point optimal (local, global).
- soit, si un tel point n'existe pas on cherche une borne inférieure à la fonction  $f$ .
- soit, à établir que  $f$  est non borné inférieurement sur  $D$ , auquel cas on adopte la convention  $\inf_D f(x) = -\infty$ .
- lorsque  $D$  est vide on pose par convention  $\inf_D f(x) = +\infty$ .

## 4.3 Classification d'un programme mathématique

On classe le problème  $(P_2)$  selon des propriétés fondamentales, à savoir la convexité, la différentiabilité et la continuité des fonctions du problème  $(P_2)$ .

### Définition 1 [9]

- Un programme mathématique est dit convexe si  $f, g_i$  et  $h_j$  sont convexes sur un ensemble  $D$  des solutions réalisables convexe.

- Si  $f, g_i$  et  $h_j$  sont différentiable le problème est dit différentiable (fonctions constituant  $D$  sont différentiables).

Signalons que, les programmes non convexes ou non différentiables sont les plus difficiles à traiter.

## 4.4 Qualification des contraintes

Pour que la qualification des contraintes (QC) soit vérifiée en tout point  $x$  dans  $D$ , il suffit que l'une des conditions (a) ou (b) soit réalisée [9] :

a- Toutes les contraintes de  $(P_2)$  sont linéaires, affines (Karlin 1959) ou convexe.

b- Toutes les contraintes d'inégalités entre autre  $g_i(x)$ , sont convexes et il existe  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $g_i(\bar{x}) < 0, \forall i$  et  $h_j(x) \forall j$  affines, (Slater 1950). Pour que (QC) soit vérifiée en un point  $x^\circ \in D$  il suffit que l'on ait :

-Les gradients  $\nabla g_i(x^\circ)$ , des contraintes saturées en  $x^\circ$  sont linéairement indépendantes (Fiacco et Mc Cornick 1968).

### Remarques :

La résolution complète de (PM) traite dans l'ordre les points suivants :

- L'existence d'une solution optimale. - La caractérisation de la solution.

- L'élaboration d'algorithme pour calculer cette solution.

(PM) : **Programme mathématique.**

## 4.5 Existence et unicité de la solution

### Théorème 1 : (Weierstrass) [9]

Si  $D$  l'ensemble des solutions, est compact non vide de  $\mathbb{R}^n$  et si  $f$  est continue sur  $D$  alors le (PM) admet au moins une solution optimale globale  $x^* \in D$ .

## 4.6 Conditions d'optimalité :(cas sans contraintes)

Soit le programme non linéaire et non contraint (PNC) [7] :

$$(P_3) \quad \begin{cases} \min f(x) \\ x \in I \subseteq \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Où la fonction  $f$  est au moins deux fois continument différentiables au point  $x^*$ .

### Définition 1[7]

Soit  $x^* \in I$ , on dit que  $y \in I$  est une direction admissible s'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $x^* + ty \in I \forall t \in [0, \alpha]$ .

• Soit  $x^*$  un minimum local de  $f(x)$ , on a alors nécessairement pour tout  $t > 0$  assez petit.

$f(x^* + ty) - f(x^*) \geq 0, \forall y$  admissible ceci implique :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^* + ty) - f(x^*)}{t} = \nabla f(x^*) y \geq 0.$$

En particulier, la direction  $y = -\nabla f(x^*)$  est admissible et on déduit :

$$-\|\nabla f(x^*)\|^2 \geq 0 \implies \|\nabla f(x^*)\|^2 \leq 0 \implies \nabla f(x^*) = 0.$$

### 4.6.1 Condition nécessaire du 1<sup>er</sup> ordre : (cas sans contraintes)

#### Théorème 1[7]

Soit  $x^*$  minimum local pour  $(P_3)$ , on a alors  $\nabla f(x^*) = 0$ .

Un point  $x$  satisfaisant cette condition est appelé un point stationnaire.

Au deuxième ordre, on obtient :

$f(x^*) \leq f(x^* + ty) = f(x^*) + t \nabla f(x^*)' y + \frac{1}{2} t^2 y' H_f(x^*) y + O(t^2)$  quand  $t$  tend vers 0.

Comme  $x^*$  est un minimum local on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^* + ty) - f(x^*)}{t^2} = \frac{1}{2} y' H_f(x^*) y + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{O(t^2)}{t^2} = \frac{1}{2} y' H_f(x^*) y \geq 0$$

$H_f$  : Etant la hessienne.

## 4.6.2 Condition nécessaire du 2<sup>ème</sup> ordre

### Théorème 2[7]

Soit  $x^*$  un minimum local pour  $(P_3)$  on a alors :

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) = 0 \\ y' H_f(x^*) y \geq 0, \quad \forall y \in I \end{cases}$$

La matrice hessienne au point  $x^*$  est donc semi-définie positive. Ces conditions ne sont pas suffisantes.

## 4.6.3 Conditions suffisantes du 2<sup>ème</sup> ordre

### Théorème 3 [7]

Soit  $x^*$  un point tel que :

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) = 0 \\ y' H_f(x^*) y > 0, \quad \forall y \in I \end{cases}$$

Alors  $x^*$  est un minimum local (strict).

## 4.6.4 Condition suffisantes d'optimalité globale

### Théorème 4 [7]

Soit une fonction continue  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x^* \in \mathbb{R}^n$  un minimum locale de  $f$  est une fonction convexe, alors  $x^*$  est un minimum globale de  $f$ . Si de plus  $f$  est strictement convexe,  $x^*$  est l'unique minimum globale de  $f$ .

## 4.7 Conditions d'optimalité : (avec contraintes)

Soit le programme mathématique (PM) :

$$(P_4) \begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Où  $f$ ,  $g_i$  et  $h_j$  sont au moins deux fois continument différentiables.

### Définition 1

Le lagrangien du programme mathématique  $(P_4)$  est défini par :

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x).$$

$\lambda_i \geq 0, i = 1 \dots m.$

### 4.7.1 Condition nécessaire du 1<sup>ère</sup> ordre (avec contrainte)

#### Théorème 1 : (Karush-Kuhn-Tucker)

Soit  $x^*$  un minimum local régulier (qualifié) de (PM).

Alors, il existe les multiplicateurs  $\lambda^* \in \mathbb{R}_+^m$  et  $\mu^* \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0. \\ \text{avec} \\ (\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0); \text{ (condition d'optimalité).} \\ \lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = \{1, \dots, m\}; \text{ (condition de complémentarité).} \\ \lambda^* \geq 0, \quad i = \{1, \dots, m\}; \\ g_i(x^*) \leq 0, \quad i = \{1, \dots, m\} \\ h_j(x^*) = 0, \quad j = \{1, \dots, p\} \end{array} \right. \quad (K.K.T)$$

**Remarques :**

- Si les contraintes ne sont pas qualifiées en  $x^*$ , les conditions de KKT ne s'appliquent pas ( $x^*$  peut être optimal sans vérifier ces conditions).

- Si  $(P_4)$  est convexe, les conditions de KKT sont à la fois nécessaires et suffisantes pour que  $x^*$  soit un minimum global.

Soit  $I(x^*) = \{i / i = 1, \dots, m; \quad g_i(x^*) = 0\}$ , est l'ensemble des indices des contraintes d'inégalités actives (saturées) au point  $x^*$ .

#### Définition 2

On définit un espace tangent  $T(x^*)$  au point  $x^*$  d'un problème  $(P_4)$  par :

$$T(x^*) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(x^*)' y \leq 0, i \in I(x^*) \text{ et } \nabla h_j(x^*)' y = 0, j = 1, \dots, p \right\}.$$

### 4.7.2 Conditions nécessaires du 2<sup>ème</sup> ordre

#### Théorème 2

Soit  $x^*$  un minimum local régulier de  $(P_4)$ . Alors, il existe des multiplicateurs  $\lambda^* \in \mathbb{R}_+^m$  et  $\mu^* \in \mathbb{R}^p$  tel que :

- les conditions de KKT sont satisfaites.

-  $y' H_L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y \geq 0, \quad \forall y \in T(x^*)$ , (Hessienne semi définie positive).



### 4.7.3 Conditions suffisantes du 2<sup>ème</sup> ordre

#### Théorème 3

S'il existe des multiplicateurs  $\lambda^* \in \mathbb{R}_+^m$  et  $\mu^* \in \mathbb{R}^p$  tels que :

les conditions de KKT sont satisfaites.

$$y' H_L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y > 0, \quad \forall y \in T(x^*)$$

$T(x^*)$  est toujours un espace tangent du problème  $(P_4)$  au point  $x^*$ . Alors le point  $x^*$  est un minimum local strict de  $(P_4)$ .

## 4.8 Programmation non linéaire stochastique

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \max P(c'(\omega)x > t) \\ Ax \leq b \\ x \in \{0, 1\}^n \text{ où } x \in \mathbb{N}^n \end{cases} \quad (3.1)$$

$c' = (c_1, \dots, c_2)$   $n$  coefficient de variables aléatoires indépendantes normale le problème déterministe équivalent est :

$$\begin{cases} \max \frac{(\mu' x - t)}{\sqrt{\nu' x}} \\ Ax \leq b \\ x \in \{0, 1\}^n \text{ où } x \in \mathbb{N}^n \end{cases} \quad (3.2)$$

$\mu$  : désigne l'espérance mathématique des composantes de  $c$ .

$\nu$  : désigne variance des composantes de  $c$ .

Ce problème est difficile à résoudre par ce que il fait appel à des techniques d'optimisations globales.

Considérons un autre problème :

$$\begin{cases} \max \frac{c_1'(\omega)x}{c_2'(\omega)x} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \text{ et } c_2(\omega)x > 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

On lui associe le problème déterministe suivant :

$$\begin{cases} \max \frac{E(c_1'(\omega)x)}{E(c_2'(\omega)x)} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

et pour résoudre le problème (3.4) on fait appel a la méthode de **A.Cambini**.

## 4.9 Méthode de A.Cambini

On considère le programme fractionnaire linéaire (P)[3]

$$\begin{cases} \max z = \frac{p'x + \alpha}{q'x + \beta} \\ x \in S \end{cases}$$

Où  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels,  $p$  et  $q$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ ,  $q$  est un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  est une matrice réelle de format  $m \times n$  et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^m$ . L'ensemble  $S$  est supposé borné non vide, et  $q'x + \beta > 0$

**Définition** [3] On dira que  $\bar{x}$  est solution optimale niveau pour le problème (P) si et seulement si  $\bar{x}$  est solution optimale du problème (P)

$$\begin{cases} \max p'x + \alpha \\ x \in S \\ q'x = q'\bar{x} \end{cases} \quad (P \bar{x})$$

Si de plus  $\bar{x}$  est un point extrême de  $S$ ,  $\bar{x}$  est dit solution niveau optimal de base

L'algorithme de **A.Cambini** génère une séquence finie  $x^k, k = \overline{1, l}$  de solutions optimales niveau dont la première est trouvée de la façon suivante :

Résoudre le programme linéaire  $(P_0)$  suivant  $\{\min q'x + \beta, x \in S\}$ , soit  $x^0$  solution optimale (car sa fonction objectif est bornée). si  $x^0$  est unique, alors elle est une solution niveau optimale de base pour (P)

sinon résoudre le programme linéaire.

$$(P_1) \{ \max \{ p'x + \alpha ; x \in S \} \}$$

si  $(P_1)$  n'admet pas de solution, alors la valeur de la fonction objectif est infinie ; sinon une solution optimale  $x^1$  de  $(P_1)$  est aussi une solution optimale niveau.

**Théorème [3]** Si  $J = \{j \in \mathbb{N}_k \mid \hat{\gamma}_j > 0\} = \emptyset$ , ou  $\hat{\gamma} = \hat{\beta}\hat{p} - \hat{\alpha}\hat{q}$  est tel que  $\hat{\gamma}_j \leq 0$  pour tout indice hors base  $j \in \mathbb{N}_k$ , alors  $x^k$  est une solution optimale du problème (P).

### 4.9.1 Algorithme

**Etape 1.** trouver la solution optimale niveau  $x^1$ .

Si une telle solution n'existe pas, alors  $\sup \left\{ \frac{p'x + \alpha}{q'x + \beta} / x \in S \right\} = +\infty$ , terminer. sinon, poser  $k = 1$  et aller à l'étape 2.

**Etape 2.** Si  $J = \{j \mid \hat{q}_j > 0\} = \emptyset$ , terminer  $x^k$  est une solution optimale du problème (P). sinon, soit  $s$  tel que  $\frac{\hat{p}_s}{\hat{q}_s} = \max \left( \frac{\hat{p}_j}{\hat{q}_j} \right)$

Si  $\hat{\gamma}_s > 0$ , aller à l'étape 3. sinon, terminer,  $x^k$  est une solution optimale de (P).

**Etape 3.** La variable hors base  $x_s$  entre dans la base au moyen d'une opération pivot, poser  $k = k + 1$  et aller à l'étape 2, si une telle opération n'est pas possible, terminer :

$$\sup_{x \in S} \left\{ \frac{p'_i x + \alpha}{q'_i x + \beta} / x \in S \right\} = \frac{\hat{p}_s}{\hat{q}_s}.$$

### Exemple 1

Une usine fabrique des citernes de forme cylindrique, et l'objectif est de trouver des dimensions qui minimise le coût (autrement dit la surface) de réalisation, sachant que le volume est compris  $10m^3$  et  $13m^3$ . ( $v \in [10m^3, 13m^3]$ )

Le volume suit une loi uniforme sur  $[10, 13]$

Le problème stochastique est :

$$\begin{cases} \min S(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ \pi r^2 h = v(\omega) \\ r > 0, h > 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Cherchons l'espérance mathématique de volume

$$E(v) = \frac{10+13}{2} = 11.5.$$

Le problème déterministe équivalent est :

$$\begin{cases} \min S(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ \pi r^2 h = 11.5 \\ r > 0, h > 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

La solution optimale est  $r^* = 1.22$  mètres;  $h^* = 2.45$  mètres

et  $S^* = 28.19 m^2$

-Cherchons la probabilité que cette solution soit réalisable

$$P(v(\omega) = \pi r^{*2} h^*) = P(v(\omega) = 11.5) = F_v(11.5) = 0.5$$

La probabilité que cette solution soit réalisable est moyenne, cherchons alors la solution optimale pour que la probabilité de sa réalisation soit égale à 0.8

$$P(\pi r^2 h = v(\omega)) = 0.8 \iff F_v(\pi r^2 h = v(\omega)) = 0.8 \iff \pi r^2 h = F_v^{-1}(0.8) = 12.4.$$

On revient à résoudre le problème déterministe non linéaire équivalent suivant :

$$\begin{cases} \min S(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ \pi r^2 h = 12.4 \\ r > 0, h > 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

La solution optimale est  $r^* = 1.25$  mètres;  $h^* = 2.5$  mètres

et  $S^* = 29.65 m^2$

Où :

$S$  : représente la surface d'une citerne.

$r$  : est le rayon.

$h$  : est la hauteur.

$\pi = 3,14$ .

## Exemple 2

Soit à résoudre le problème non linéaire stochastique suivant :

$$\begin{cases} \min Z(\omega, x) = c_1(\omega) x_1^2 + c_2(\omega) x_2^2 \\ x_1 + x_2 \leq -1 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.11)$$

Où  $c_1(\omega)$  et  $c_2(\omega)$  respectivement suivent une loi uniforme sur  $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$  et  $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$ , et leur espérance mathématique est :

$$E(c_1(\omega)) = \frac{\frac{5}{2} + \frac{7}{2}}{2} = 3, \quad E(c_2(\omega)) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{4}}{2} = 1$$

Remplaçant  $c_1(\omega)$  et  $c_2(\omega)$  par leur espérance mathématique on obtiendra le problème déterministe équivalent :

$$\begin{cases} \min Z(x) = 3x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 + x_2 \leq -1 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.12)$$

la solution optimale de ce problème est :  $x_1^* = -\frac{1}{4}$ ,  $x_2^* = -\frac{3}{4}$  qui a pour valeur optimale  $Z^* = \frac{3}{4}$ .

# Chapitre 5

## Programmation sur Lingo

### 5.1 Définition du logiciel Lingo

Lingo est un logiciel pour la résolution des programmes linéaires et non linéaire ainsi que les programme stochastique

### 5.2 Introduction

Lingo est un logiciel utilisé pour résoudre les modèles d'optimisation linéaire, entier et quadratique, il est aussi utilisé pour résoudre les modèles d'optimisation globale non linéaire.

Une des caractéristique de lingo c'est qu'il offre des outils qui peuvent aider à l'analyse des modèles en utilisant la méthode du simplexe.

### 5.3 Installation du logiciel

Pour utiliser cette version de lingo il est conseillé d'avoir au moins un processeur 486 et 8 Mo de mémoire RAM. il faut aussi prévoir un espace disque dur de 2 Mo pour pouvoir l'installer.

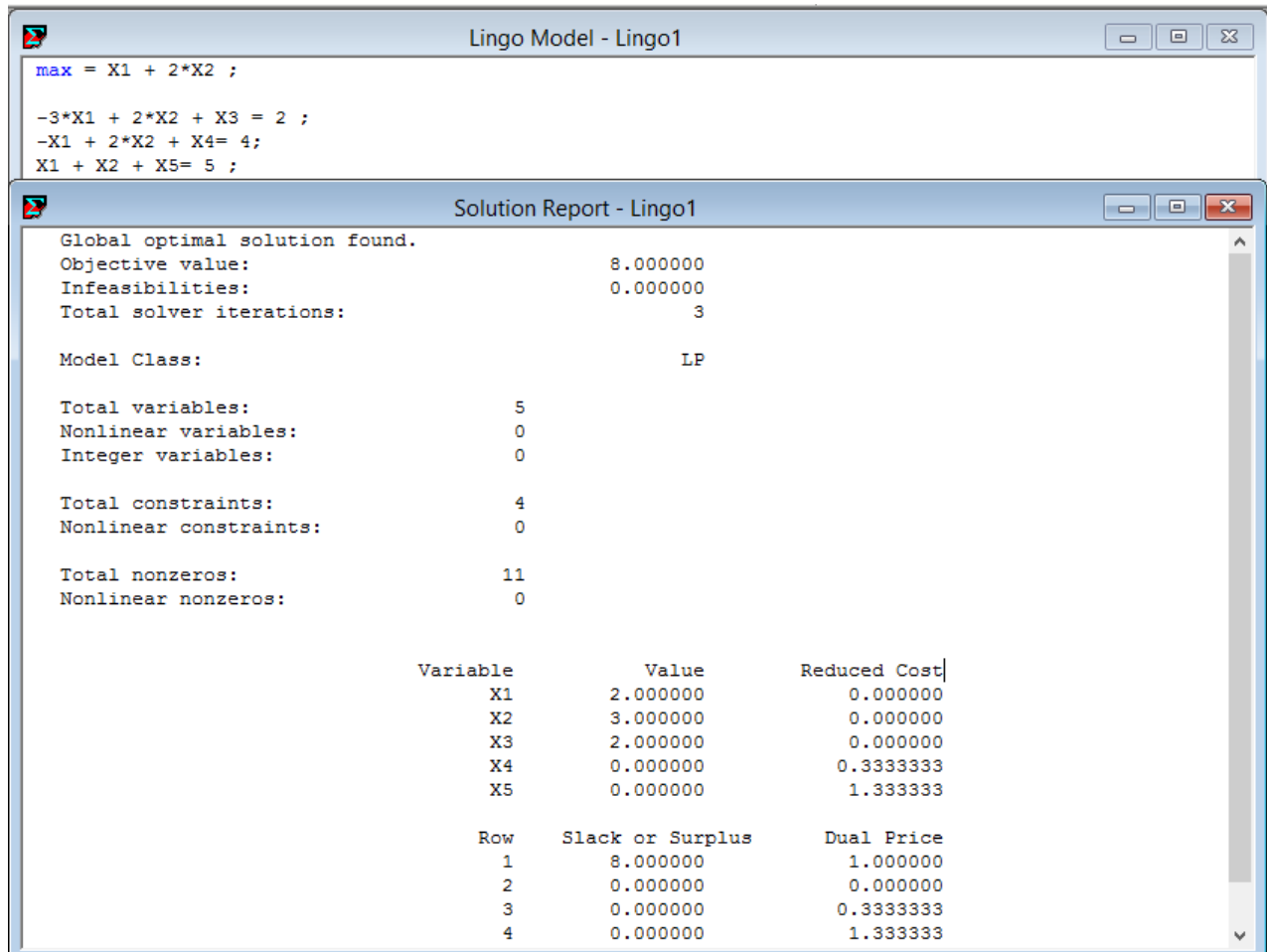
Les étapes de l'installation sont :

- 1.démarrer Windows
- 2.Insérer CD-ROM
- 3.Cliquer sur l'icône setup (install) dans votre explorateur de Windows
- 4.Suivre les instructions de l'écran

Pour plus d'information sur ce logiciel visiter l'adresse web [www.lingo.com](http://www.lingo.com)

# Application 1

La programmation de l'exemple (PL1)



The image shows two windows from the Lingo software. The top window, titled "Lingo Model - Lingo1", contains the following model definition:

```
max = X1 + 2*X2 ;  
-3*X1 + 2*X2 + X3 = 2 ;  
-X1 + 2*X2 + X4 = 4 ;  
X1 + X2 + X5 = 5 ;
```

The bottom window, titled "Solution Report - Lingo1", displays the results of the optimization. It reports a global optimal solution found with an objective value of 8.000000. The model is classified as LP. The solution report includes the following data:

Variable	Value	Reduced Cost
X1	2.000000	0.000000
X2	3.000000	0.000000
X3	2.000000	0.000000
X4	0.000000	0.3333333
X5	0.000000	1.333333

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	8.000000	1.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.3333333
4	0.000000	1.333333

# Application 2

La programmation de (MOP)

The image shows two windows from the Lingo software. The top window, titled "Lingo Model - Lingo2", contains the following model code:

```
min = -X1 + 0.5*X2 ;  
3*X1 - X2 <= 6;  
X2 <= 2 ;
```

The bottom window, titled "Solution Report - Lingo2", displays the results of the optimization. It reports a global optimal solution found with an objective value of -2.000000. The model is classified as LP. The solution report includes the following data:

Variable	Value	Reduced Cost
X1	2.000000	0.000000
X2	0.000000	0.1666667

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	-2.000000	-1.000000
2	0.000000	0.3333333
3	2.000000	0.000000

# Application 3

La programmation de l'exemple ( $P'_d$ )

The screenshot displays the Lingo3 interface. The top window, titled "Lingo Model - Lingo3", contains the following model definition:

```
min = X1 + X2 ;  
3*X1 + X2 >= 7;  
0.75*X1 + X2 >= 4;
```

The bottom window, titled "Solution Report - Lingo3", provides the following summary:

Global optimal solution found.  
Objective value: 4.333333  
Infeasibilities: 0.000000  
Total solver iterations: 2  
Model Class: LP

Model statistics:

- Total variables: 2
- Nonlinear variables: 0
- Integer variables: 0
- Total constraints: 3
- Nonlinear constraints: 0
- Total nonzeros: 6
- Nonlinear nonzeros: 0

Variable values and reduced costs:

Variable	Value	Reduced Cost
X1	1.333333	0.000000
X2	3.000000	0.000000

Slack or Surplus and Dual Prices:

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	4.333333	-1.000000
2	0.000000	-0.1111111
3	0.000000	-0.8888889



# Application 4

La programmation de l'exemple (1.17)

The image shows two windows from the Lingo software. The top window, titled "Lingo Model - Lingo2", contains the following text:

```
min = 2*X1 + X2 ;  
X1 + X2 <= 4;  
0.5*X1 + 0.3*X2 >= 1.5 ;
```

The bottom window, titled "Solution Report - Lingo2", displays the results of the optimization. It starts with the message "Global optimal solution found." and provides the following summary statistics:

Objective value:	5.500000
Infeasibilities:	0.000000
Total solver iterations:	2
Model Class:	LP
Total variables:	2
Nonlinear variables:	0
Integer variables:	0
Total constraints:	3
Nonlinear constraints:	0
Total nonzeros:	6
Nonlinear nonzeros:	0

Below the summary, there are two tables. The first table shows the values for the variables:

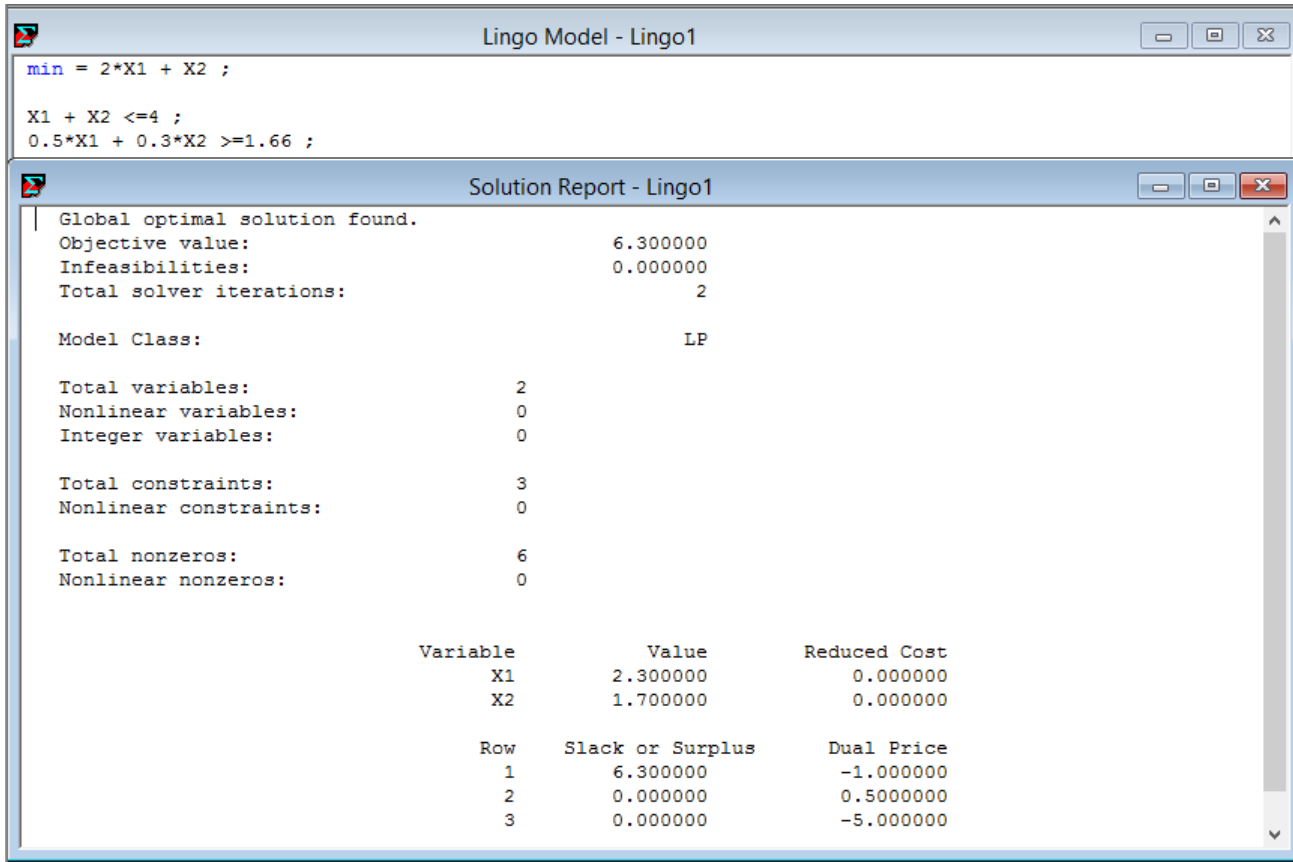
Variable	Value	Reduced Cost
X1	1.500000	0.000000
X2	2.500000	0.000000

The second table shows the slack or surplus and dual prices for the constraints:

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	5.500000	-1.000000
2	0.000000	0.500000
3	0.000000	-5.000000

# Application 5

La programmation de l'exemple (1.18)



The image shows two windows from the Lingo software. The top window, titled "Lingo Model - Lingo1", contains the following model code:

```
min = 2*X1 + X2 ;  
X1 + X2 <=4 ;  
0.5*X1 + 0.3*X2 >=1.66 ;
```

The bottom window, titled "Solution Report - Lingo1", displays the results of the optimization. It reports a global optimal solution found with an objective value of 6.300000 and zero infeasibilities. The model class is LP. The solution for variables X1 and X2 is shown in the table below.

Variable	Value	Reduced Cost
X1	2.300000	0.000000
X2	1.700000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	6.300000	-1.000000
2	0.000000	0.500000
3	0.000000	-5.000000

# Application 6

La programmation de l'exemple (1.20)

The image shows two windows from the Lingo software. The top window, titled "Lingo Model - Lingo3", contains the following model definition:

```
min = 7.5*(0.5*X1 + 0.3*X2)^2 - 9.75*X1 - 6.05*X2 + 18.675 ;  
  
X1 + X2 <= 4;
```

The bottom window, titled "Solution Report - Lingo3", displays the results of the optimization. It reports a local optimal solution found with an objective value of 5.266667 and zero infeasibilities. The model class is NLP. The solution report includes the following data:

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.1666667	0.000000
X2	3.833333	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	5.266667	-1.000000
2	0.000000	0.500000

# Application 7

La programmation de l'exemple (4.9)

The image shows two overlapping windows from the Lingo software. The top window, titled "Lingo Model - Lingo2", contains the following model code:

```
min = 2*3.14*r^2 + 2*3.14*r*h ;  
3.14*r^2*h = 11.5 ;
```

The bottom window, titled "Solution Report - Lingo2", displays the results of the optimization. It reports a local optimal solution with an objective value of 28.19939 and zero infeasibilities. The model is classified as NLP (Nonlinear Programming). The solution report includes the following summary statistics:

Total variables:	2
Nonlinear variables:	2
Integer variables:	0
Total constraints:	2
Nonlinear constraints:	2
Total nonzeros:	4
Nonlinear nonzeros:	4

The variable values and reduced costs are as follows:

Variable	Value	Reduced Cost
R	1.223431	0.000000
H	2.446862	0.000000

The dual prices for the constraints are:

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	28.19939	-1.000000
2	0.000000	-1.634747

# Application 8

La programmation de l'exemple (4.10)

The image shows two windows from the Lingo software. The top window, titled "Lingo Model - Lingo3", contains the following model definition:

```
min = 2*3.14*r^2 + 2*3.14*r*h ;  
3.14*r^2*h = 12.4 ;
```

The bottom window, titled "Solution Report - Lingo3", displays the results of the optimization. It reports a local optimal solution with an objective value of 29.65211. The model is classified as NLP (Nonlinear Programming). The solution report includes the following statistics:

- Objective value: 29.65211
- Infeasibilities: 0.000000
- Extended solver steps: 5
- Total solver iterations: 107
- Model Class: NLP
- Total variables: 2
- Nonlinear variables: 2
- Integer variables: 0
- Total constraints: 2
- Nonlinear constraints: 2
- Total nonzeros: 4
- Nonlinear nonzeros: 4

The variable values and reduced costs are as follows:

Variable	Value	Reduced Cost
R	1.254548	0.000000
H	2.509096	0.000000

The slack or surplus and dual prices for the constraints are:

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	29.65211	-1.000000
2	0.000000	-1.594199

# Application 9

La programmation de l'exemple (4.12)

The screenshot displays two windows from the Lingo3 software. The top window, titled "Lingo Model - Lingo3", contains the following model code:

```
min = 3*X1^2 + X2^2 ;  
X1 + X2 <= -1 ;  
X1 - X2 <= 1 ;  
@free(X1);  
@free(X2);
```

The bottom window, titled "Solution Report - Lingo3", shows the results of the optimization. It reports a local optimal solution found with an objective value of 0.7500000 and zero infeasibilities. The model is classified as NLP. The solution report includes the following data:

Variable	Value	Reduced Cost
X1	-0.2500000	0.0000000
X2	-0.7500000	0.0000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.7500000	-1.0000000
2	0.0000000	1.5000000
3	0.5000000	0.0000000

## Conclusion générale

Depuis plusieurs années, les problèmes d'incertitude (ou de nature aléatoires) sont considérés difficiles à résoudre, mais après l'apparition des méthodes de résolution ces problèmes sont devenues faciles à résoudre et cela on transforme ces problèmes stochastiques en problème déterministes qui sont des problèmes pris en charge par la programmation mathématique.

Ces dernières années, des travaux ont été réalisés dans la prise en compte de l'aléatoire en programmation mathématique.

Dans ce modeste travail après avoir donné une vue panoramique sur les méthodes d'optimisation stochastique (linéaire et non linéaire, mono objectif et multi objectifs), ces méthodes sont basées sur la transformation des problèmes stochastiques en problème déterministes à fin d'arriver à la solution optimale.

Nous avons, en premier lieu, généralisé conjointement les différentes approches (passive et active) de la programmation linéaire stochastique, et les critères d'optimisations du problème équivalent qui aident à résoudre les problèmes stochastiques, tel que nous avons cité les différents cas possibles (cas des objectifs aléatoires, cas des contraintes aléatoires ou bien les deux à la fois), nous avons aussi traité le modèle "chance constrained programming" la où le décideur fixe un niveau de sécurité à respecter, et le modèle avec recours (général, fixe, fixe simple), aussi le programme du risque minimal multiple et "stochastique goal programming" dans la programmation multi objectifs.

En deuxième lieu, on a fait appel à quelques modèles dans la programmation stochastique non linéaire, tel que le modèle avec objectif fractionnaire aléatoire qu'on résout à l'aide de l'algorithme de A.Gambini, et le modèle dont les contraintes ou l'objectif sont quadratiques stochastiques que nous avons résolu en utilisant les méthodes de la programmation linéaire stochastiques.

Cette expérience, nous a permis de parfaire nos connaissances en matière de programmation mathématique et programmation mathématique stochastique.

Nous envisageons une suite pour notre travail comme suit : (en perspectives)

- Résolution de problème mathématique stochastique quelconque.
- Résolution de problème mathématique stochastique quelconque en multi-objectif.
- Résolution de problème mathématique flou stochastique quelconque en multi-objectif

# Bibliographie

[1] : Aiche Farid, thèse de doctorat sur la programmation linéaire multi objectif floues stochastique ; Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou, 2013.

[2] : Bachir Safa, Sid Mohand Rabah, Mémoire d'ingénieur sur la rentabilisation des moyens du transports, cas Naftal Tizi Ouzou ; Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou, 2014.

[3] :Belkadi Mourad, Koulougli Ahcene, mémoire d'ingénieur sur la résolution d'un problème multi objectif linéaire et fractionnaire en nombres entiers, Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou ;2014.

[4] : Bellahcene Fatima, thèse de doctorat sur la programmation linéaire multi objectif stochastique en nombre entier ; Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou,2006.

[5] : Dilem Kahina, Hammad Lila, mémoire d'ingénieur sur la programmation multi objectif et application au ensembles floues ; Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou, 2015.

[6] : Introduction à la statistique, E.Amzallag, N.Piccioli.

[7] : Introduction à l'optimisation différentiable, Michel Bierlaire.

[8] : Programmation linéaire, Jacques Teghem.

[9] : Programmation mathématique, théorie et algorithmes, 2<sup>ème</sup> édition, Michel Minoux.



## **Résumé**

La Recherche Opérationnelle est un ensemble de méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche de la meilleure façon d'opérer des choix en vue d'aboutir au résultat visé ou au meilleur résultat possible.

Notre travail se résume comme suit:

Dans le premier chapitre, nous avons défini et rappelé quelques notions sur les variables aléatoires (discrètes et continues) et leurs propriétés (la loi de distribution, la fonction de densité, fonction de répartition, espérance mathématique, variance, covariance, écart type, et la matrice de covariance).

Ensuite le deuxième chapitre est réservé à la présentation de la programmation linéaire mono-objective et multi-objective, dans la première partie de ce chapitre on a traité le cas mono-objectif, et on a utilisé les méthodes du simplexe pour la résolution d'un problème de programmation linéaire, et on a terminé cette partie par un exemple. Dans la deuxième partie on a traité le cas multi-objectif, dont on a cité la dominance et l'efficacité d'une solution, la résolution par méthode du simplexe.

Le troisième chapitre est partagé en deux parties, la programmation linéaire stochastique mono objectif et la programmation linéaire stochastique multi-objectif. Dans la première partie on a défini un problème linéaire stochastique mono-objectif et on a cité deux approches ( Passive et active ) de résolution de ce dernier et quelques critères d'optimisation du problème équivalent lorsque l'objectif est aléatoire (E-modèle, V-modèle, EV-modèle, P-modèle, katoka). Quelques modèles lorsque les contraintes sont aléatoires (Seuil de probabilités sur les contraintes, recours général, fixe, et fixe simple) et deux exemples. Dans la deuxième partie de ce chapitre on a étudié le cas d'un programme linéaire multi-objectif stochastique, dont on a cité le programme du risque minimal multiple, et stochastique goal programming.

Dans le quatrième chapitre on a parlé de la programmation mathématique (cas non linéaire), on a défini quelques notions de base, la classification d'un programme mathématique, qualification des contraintes, l'existence et l'unicité d'une solution, et on a cité les conditions d'optimalité de 1<sup>ere</sup> et 2<sup>eme</sup> ordre pour les cas avec contraintes et sans contraintes, et pour la programmation non linéaire stochastique nous avons donné deux modèles; l'un est fractionnaire, il se résout par l'algorithme de A.Cambini, et l'autre fait appel à une optimisation globale ce qui engendre la complexité de résolution de ce dernier, et enfin nous avons terminé ce chapitre par la résolution de deux problèmes stochastiques non linéaires.

Le cinquième chapitre se base sur le côté de programmation par le logiciel Lingo.

## **Mots clés**

Variables aléatoire, loi du distribution, la programmation linéaire, simplexe, programmation multi-objectifs, programmation linéaire stochastique, approche passive, approche active et ses critères, la programmation multi-objectifs linéaire stochastique, programmation mathématique, programmation non linéaire stochastique, méthode du A.Cambini, Lingo.